PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL

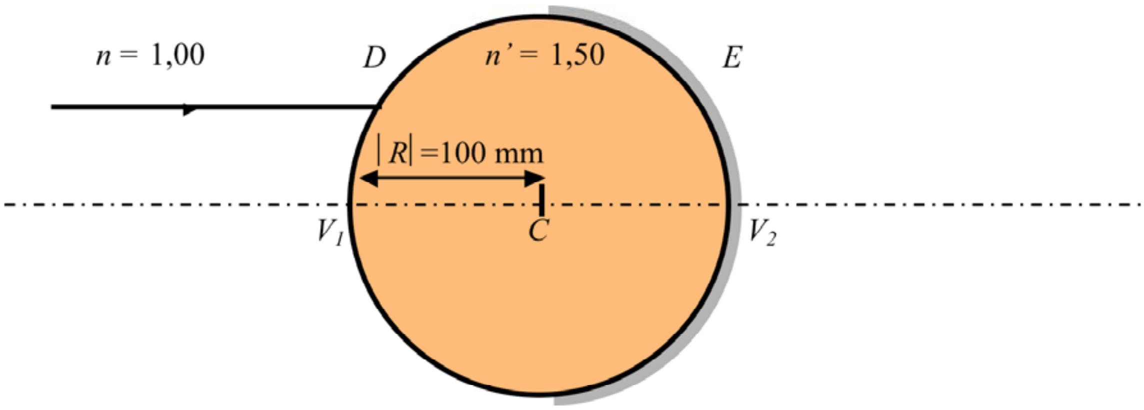
Unidad 7:

7.2 Asociación de dioptrio y espejo

Jaume Escofet

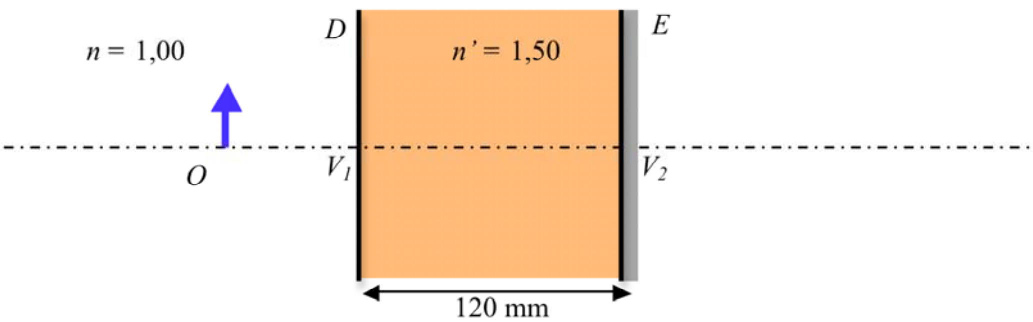
UNIDAD 7. PROBLEMAS DE ASOCIACIÓN DE DIOPTRIO Y ESPEJO

1. Una bola de vidrio de radio $|R|$ = 100 mm tiene espejada la mitad de su esfera según se muestra en la figura. Un rayo paralelo al eje incide sobre la cara dióptrica de la esfera. Determina:
a) La posición de la imagen formada por la primera cara (1ª imagen).
b) La posición de la imagen formada por la cara espejada después de que la luz se refracte en la primera cara (2ª imagen).
c) La posición de la imagen formada por la primera cara a la vuelta, después de que el rayo de luz del apartado anterior, debido a la reflexión en el espejo *E* se vuelva a refractar en la primera cara (3ª imagen).



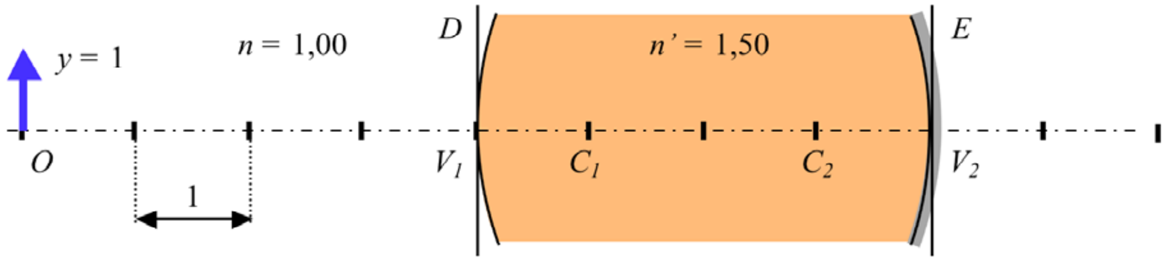
R/ a) $V_1O'_1$ = 300 mm; b) $V_2O'_2$ = –100/3 mm; c) $V_1O'_3$ = 250 mm.

2. Sea el sistema de la figura formado por un bloque de vidrio de forma cúbica con la cara espejada en la cara posterior. Sabiendo que V_1O = –60 mm y que el tamaño del objeto es de 30 mm. Determina:
a) La posición de la imagen final (V_1O').
b) El tamaño de dicha imagen.



R/ / a) V_1O' = 220 mm; b) y' = 30 mm.

3. Sea el sistema de la figura formado por la asociación de un dioptrio esférico D y un espejo, también esférico, E. Determina:
a) La posición de la imagen final (V_1O').
b) El aumento lateral producido por el sistema.
c) El tamaño de la imagen final.



R/ a) $V_1O' = -12$ mm; b) $m = +1$; c) y' = +1.

---

4. Sea una lente delgada L de índice 1,40 sumergida en aire cuyas caras anterior (1) y posterior (2) tienen las potencias siguientes: $P'_1 = 6$ D y $P'_2 = 4$ D. Se espeja la cara posterior (2) de dicha lente.
Un objeto real de 10 mm de altura está situado a 200 mm de esta lente. Determina:
a) La posición de la imagen final.
b) El aumento lateral producido por el sistema.
c) El tamaño de la imagen final.

R/ a) $V_2O' = -200/7$ mm; b) $m = -1/7$; c) $y' = -10/7$ mm.

Comentarios a los problemas de asociación de dioptrio y espejo

1. Ejercicio de asociación del dioptrio estérico *D* y el espejo esférico *E*. Debido a la reflexión de la luz en el espejo *E* la luz atraviesa el dioptrio *D* dos veces, una a la ida y la otra a la vuelta. Debe calcularse en primer lugar la posición de la imagen formada por el dioptrio *D*. La imagen anterior es objeto para el espejo *E*. Se busca la posición de la imagen formada por el espejo *E*. La luz que incide en el dioptrio después de reflejarse en el espejo *E* ha cambiado de sentido. Si inicialmente viajaba de izquierda a derecha ahora viaja de derecha a izquierda, dirección contraria al criterio de signos adoptado en todas las fórmulas utilizadas hasta ahora, y condición que debe tenerse en cuenta a la hora de aplicar la ecuación de Descartes que determina la posición de la imagen formada por el dioptrio *D* a la vuelta.

Para determinar la posición de la imagen formada por el dioptrio *D* a la vuelta se puede proceder de dos maneras.

1. Esquematizando el problema de manera que la luz incida de izquierda a derecha. Para ello debe cambiarse la orientación de todos los elementos del sistema.

La figura 1 esquematiza la formación de la imagen del dioptrio *D* cuando la luz incide de derecha a izquierda.

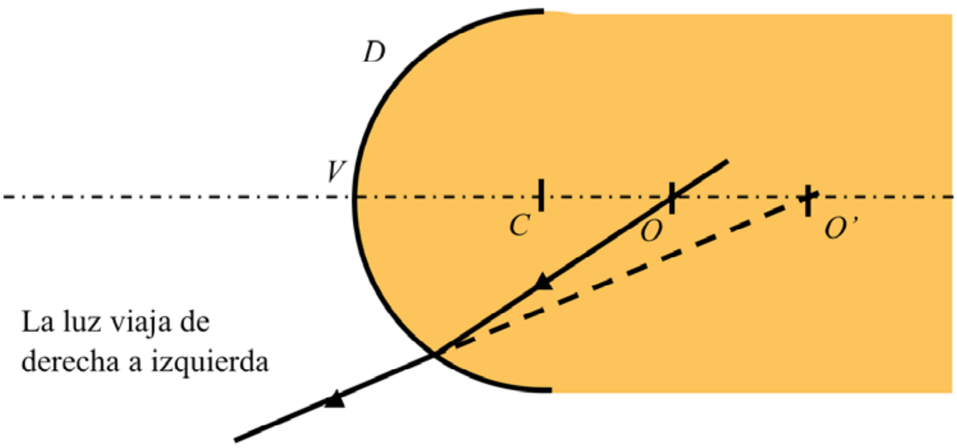


Figura 1

Para poder aplicar la fórmula de Descartes la luz debe incidir de izquierda a derecha, para ello debe cambiarse la orientación del sistema según se muestra en la figura 2.

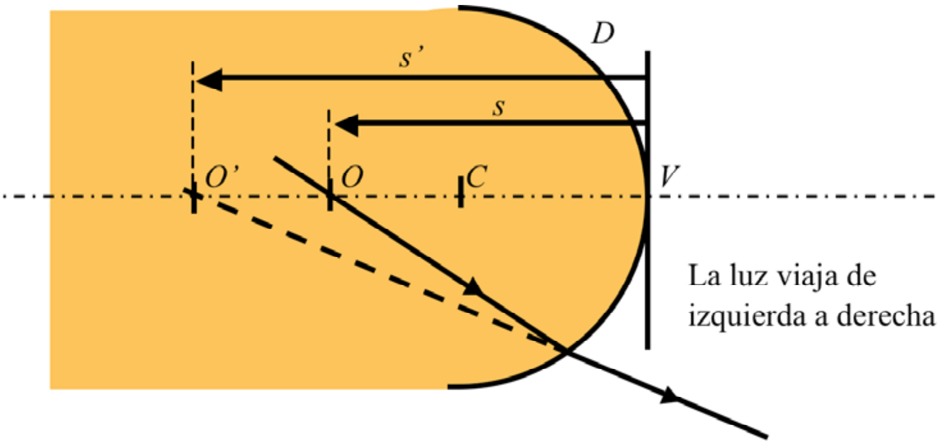


Figura 2

Finalmente, una vez obtenidos los resultados se esquematiza el problema en su configuración inicial (figura 1) de la forma:

VO = – *s*;   *VO'* = – *s'*.

2. Aplicando la reversibilidad del rayo de luz. En este caso no cambiamos la orientación del sistema de la figura 1 y esquematizamos el sistema de la manera siguiente:

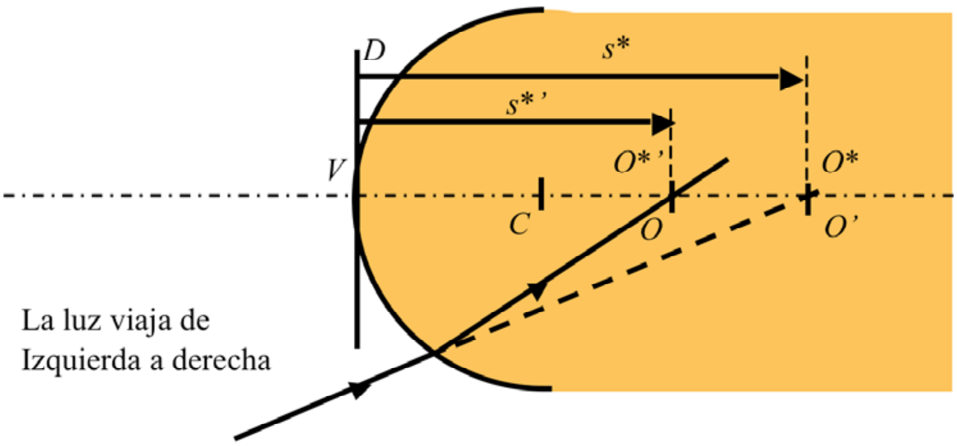


Figura 3

En este caso la imagen *O'* se ha convertido el el objeto *O**. Y el objeto *O* en la imagen *O*'*.

Se aplica la ecuación de Descartes a las coordenadas *s** y *s*'* y, una vez obtenido el valor de *s** se deshace el cambio de la forma:

VO = *s*'*;   *VO'* = *s**.

2. Se procede de la misma forma que en el ejercicio 1. En el caso del aumento lateral debe considerarse que tanto en el dioptrio plano, como en el espejo plano, su valor siempre es constante y vale m = +1.

3. Se procede de la misma forma que en el ejercicio 1. En el caso del aumento lateral cuando el dioptrio forma la imagen a la vuelta debe considerarse el proceso utilizado en el cálculo de la posición de la imagen.
Si se ha hecho con inversión del sistema el aumento se calcula aplicando de manera directa la fórmula del aumento.
Si se ha hecho mediante reversibilidad del rayo el aumento obtenido a partir de las coordenadas s^* y $s^{*\prime}$ es el inverso del valor deseado.

4. Se resuelve de la misma forma que el ejercicio 3. Tèngase en cuenta que por ser lente delgada su grosor es despreciable de manerea que debe tomarse V_1V_2 = 0.

Todos los ejercicios anteriores pueden resolverse a partir del espejo equivalente asociado a cada caso.

El espejo equivalente queda determinado por la posición de su vértice V_{eq} y de su centro C_{eq}, dónde:

V_{eq} es el conjugado objeto del vértice V del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio D.

C_{eq} es el conjugado objeto del centro C del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio D.

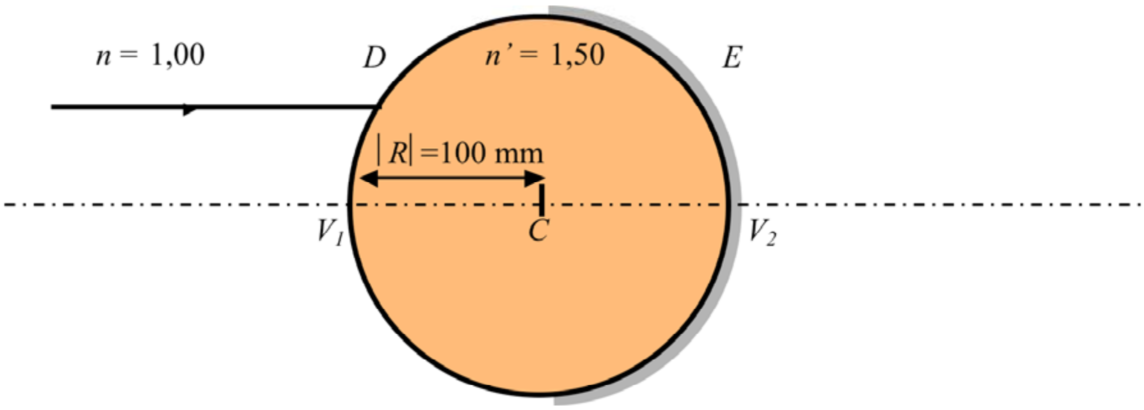
UNIDAD 7. PROBLEMAS DE ASOCIACIÓN DE DIOPTRIO Y ESPEJO

1. Una bola de vidrio de radio $|R|$ = 100 mm tiene espejada la mitad de su esfera según se muestra en la figura. Un rayo paralelo al eje incide sobre la cara dióptrica de la esfera. Determina:

a) La posición de la imagen formada por la primera cara (1ª imagen).

b) La posición de la imagen formada por la cara espejada después de que la luz se refracte en la primera cara (2ª imagen).

c) La posición de la imagen formada por la primera cara a la vuelta, después de que el rayo de luz del apartado anterior, debido a la reflexión en el espejo *E* se vuelva a refractar en la primera cara (3ª imagen).



SOLUCIÓN:

a) Consideremos la asociación de un dioptrio plano *D* y un espejo plano *E*. La imagen final se obtendrá a partir de la acción encadenada del dioptrio estérico *D* (D_1), el espejo plano *E* y el dioptrio estérico *D* (D_3) a la vuelta, ya que el rayo de luz atraviesa el dioptrio plano dos veces.

El esquema es el siguiente:

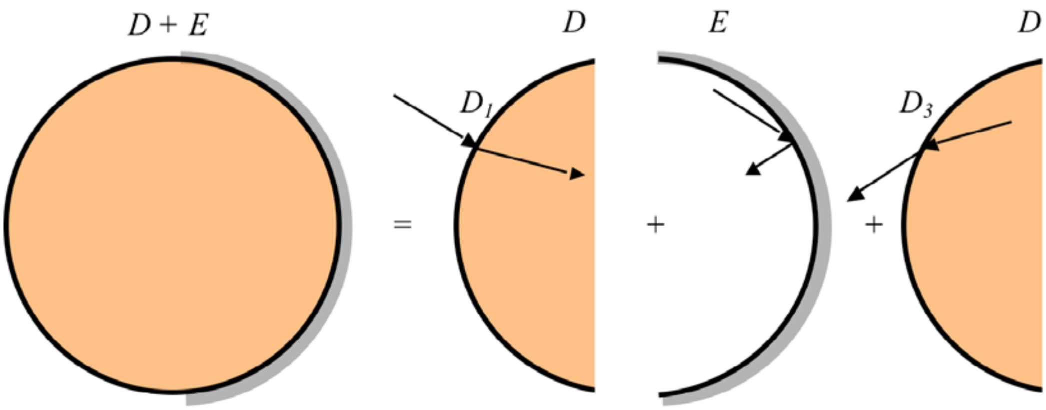


Figura 1

a1) Imagen formada por el dioptrio esférico D_1 (La luz que incide en el dioptrio D_1 va de izquierda a derecha):

Debido a que el rayo incidente es paralelo al eje el objeto está situado en el infinito. Por lo tanto, la imagen estará situada en el punto focal imagen del dioptrio D_1.

$$f'_1 = \frac{n'_1}{n'_1 - n_1} R_1; \qquad n_1 = 1,00; \qquad n'_1 = 1,50; \qquad R_1 = +100 \text{ mm.}$$

$$f'_1 = \frac{1,50}{1,50 - 1,00} 100 = 300 \text{ mm.} \qquad V_1O'_1 = f'_1 = 300 \text{ mm.}$$

La potencia del dioptrio vale:

$$P'_1 = P'_D = \frac{n'_1}{f'_1} = \frac{1,50}{0,300} = 5 \text{ D} = \frac{5}{1000}\frac{1}{\text{mm}} = \frac{5}{1000} \text{ mm}^{-1}.$$

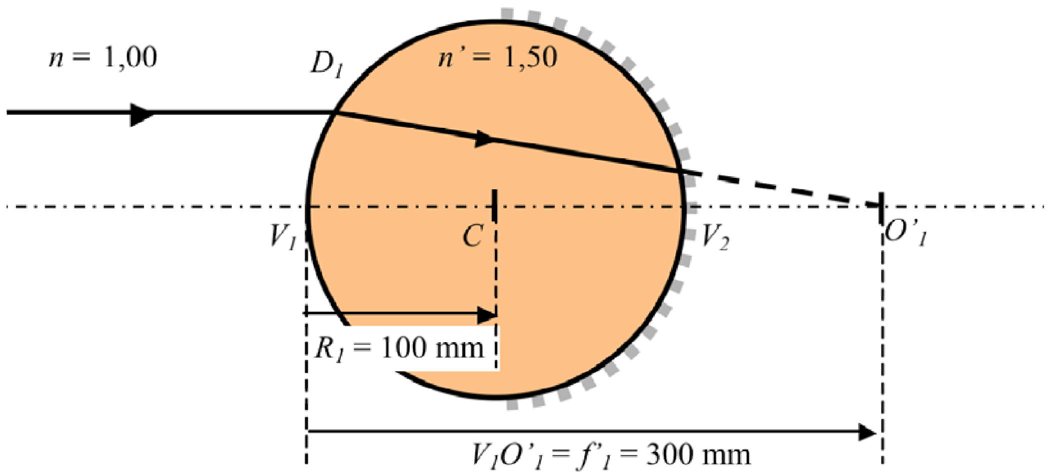


Figura 2

a2) Imagen formada por el espejo esférico E (La luz que incide en el espejo E va de izquierda a derecha):

De la ecuación de Descartes aplicada al espejo esférico:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{2}{R_2}$$

$s_2 = V_2O_2 = V_2O'_1 = V_2V_1 + V_1O'_1 = -200 + 300 = 100$ mm; $\qquad R_2 = -100$ mm.

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{s'_2} = \frac{2}{-100}; \qquad \frac{1}{s'_2} = -\frac{2}{100} - \frac{1}{100} = -\frac{3}{100} \text{ mm}^{-1};$$

$s'_2 = V_2O'_2 = -\dfrac{100}{3}$ mm.

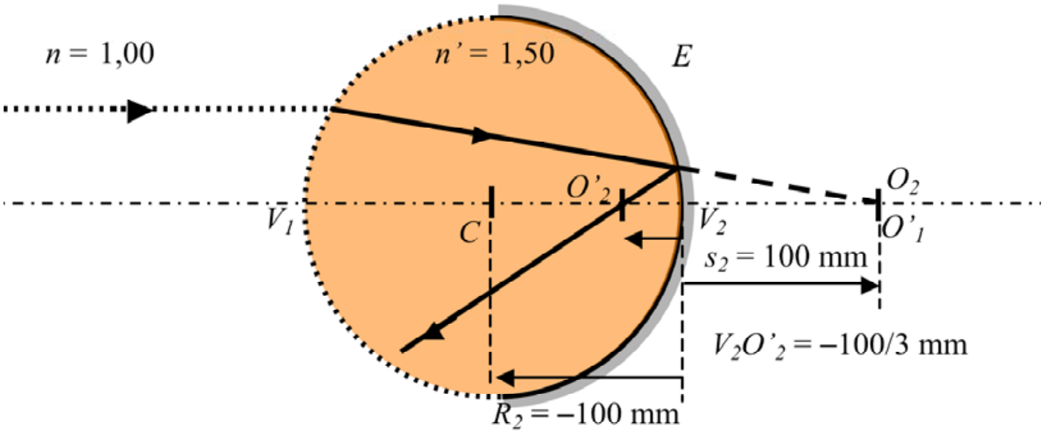


Figura 3

a3) Imagen formada por el dioptrio esférico D_3 a la vuelta (La luz que incide en el dioptrio D_3 va de derecha a izquierda):

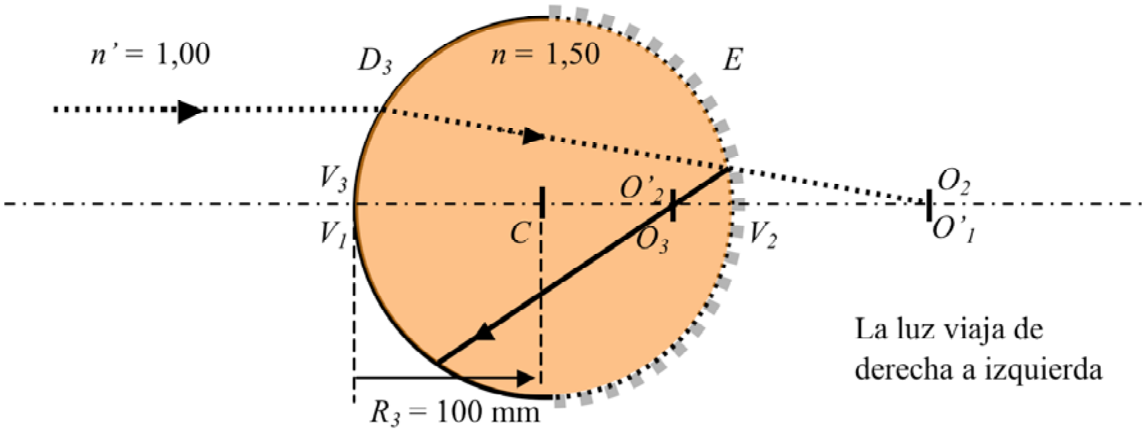


Figura 4

En este caso la luz viaja de derecha a izquierda. Por otro lado todas las fórmulas utilizadas consideran que la luz viaja de izquierda a derecha. Debe esquematizarse el problema de manera que la luz incida de izquierda a derecha

a31) Consideremos que la luz viaja de izquierda a derecha. Disponemos el sistema de manera que la luz viaje de izquierda a derecha:

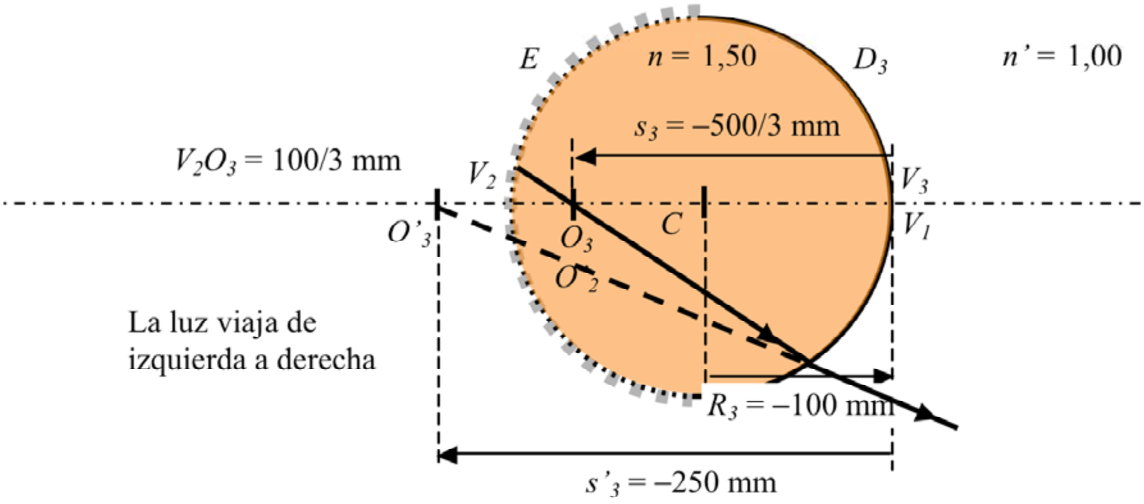


Figura 5

Aplicando la ecuación de Descartes: $n_3 = n = 1{,}50$; $n'_3 = n' = 1{,}00$;

$$s_3 = V_3O_3 = V_1O_3 = V_1V_2 + V_2O_3 = -200 + \frac{100}{3} = -\frac{500}{3} = -166{,}7 \text{ mm.}$$

$$-S_3 + S'_3 = P'_3. \qquad S_3 = \frac{n_3}{s_3} = \frac{1{,}50}{-\frac{500}{3}} = -\frac{4{,}5}{500} \text{ mm}^{-1};$$

$$S'_3 = \frac{n'_3}{s'_3} = \frac{1{,}00}{s'_3} \text{ mm}^{-1};$$

$P'_3 = P'_1 = P'_D = \frac{5}{1000}\text{mm}^{-1}$ (Al cambiar la orientación del dioptrio la potencia no varía).

$$-\left(-\frac{4{,}5}{500}\right) + \frac{1{,}00}{s'_3} = \frac{5}{1000}; \qquad \frac{1}{s'_3} = \frac{5}{1000} - \frac{4{,}5}{500} = \frac{5-9}{1000} = -\frac{4}{1000}\text{mm}^{-1}.$$

$$s'_3 = -\frac{1500}{6} \text{ mm} = -250 \text{ mm}.$$

Situemos finalmente la orientación del sistema de manera que volvamos a la configuración inicial:

La posición de la imagen final será: $s'_3 = V_1O'_3 = V_2O'_3 = V_1O' = V_2O' = 250$ mm.

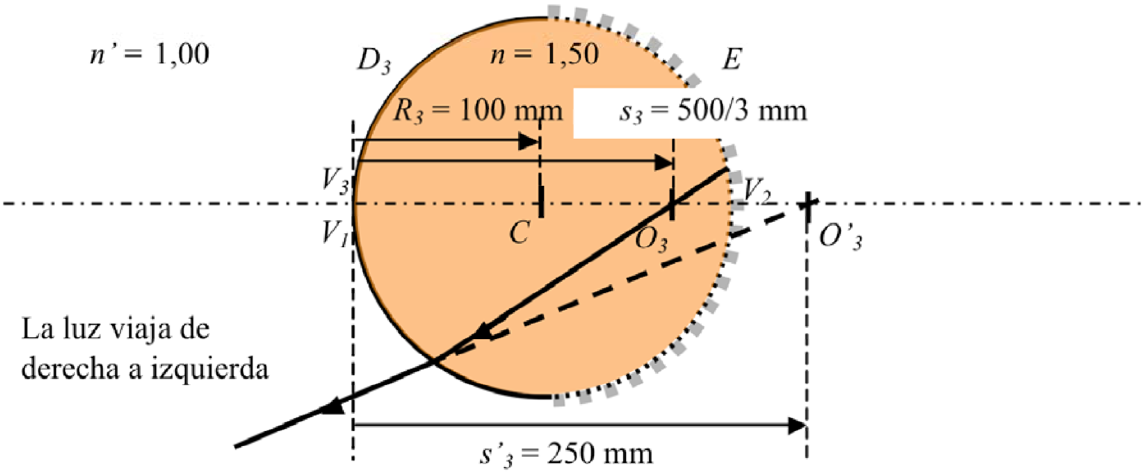


Figura 6

a32) Resolvamos el apartado anterior considerando que la luz viaja de izquierda a derecha sin cambiar la orientación del esquema:

Consideremos el esquema de la figura 6. Debido a la reversibilidad en la trayectoria del rayo de luz podemos esquematizar la figura anterior de la siguiente manera (Obsérvese que en el esquema de la figura 7 se ha cambiado el sentido del rayo de luz):

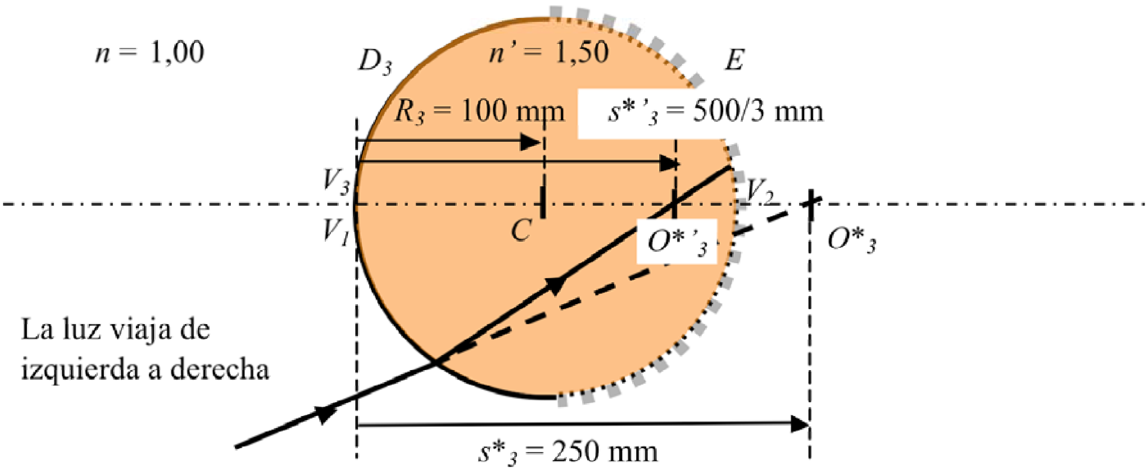


Figura 7

En el esquema de la figura 7 O'_3 es el objeto, que denominaremos O^*_3 y O_3 es la imagen, que denominaremos $O^{*\prime}_3$.

De la ecuación de Descartes:

$$-S^*_3 + S^{*\prime}_3 = P^{*\prime}_3$$

$n_3 = n = 1{,}00$; $n'_3 = n' = 1{,}50$.

$$S^*_3 = \frac{n_3}{s^*_3} = \frac{1{,}00}{s^*_3}\ \text{mm}^{-1}; \qquad S^{*\prime}_3 = \frac{n'_3}{s^{*\prime}_3} = \frac{1{,}50}{s^{*\prime}_3} = \frac{1{,}50}{\frac{500}{3}} = \frac{4{,}5}{500}\text{mm}^{-1};$$

$$P^{*\prime}_3 = P'_D = \frac{5}{1000}\text{mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1{,}00}{s^*_3} + \frac{4{,}5}{500} = \frac{5}{1000}; \qquad -\frac{1}{s^*_3} = \frac{5}{1000} - \frac{4{,}5}{500} = \frac{5-9}{1000} = -\frac{4}{1000}\ \text{mm}^{-1}..$$

$$s^*_3 = \frac{1000}{4} = 250\ \text{mm}.$$

Deshacemos los cambios para obtener el resultado final:

$$s_3 = V_3O_3 = V_1O_3 = s^{*\prime}_3 = \frac{500}{3}\ \text{mm};$$

$$s'_3 = V_3O'_3 = V_3O' = V_1O'_3 = V_1O' = s^*_3 = 250\ \text{mm}.$$

Así pues la imagen final *O'* y todas la imágenes intermedias se muestran en la figura siguiente.

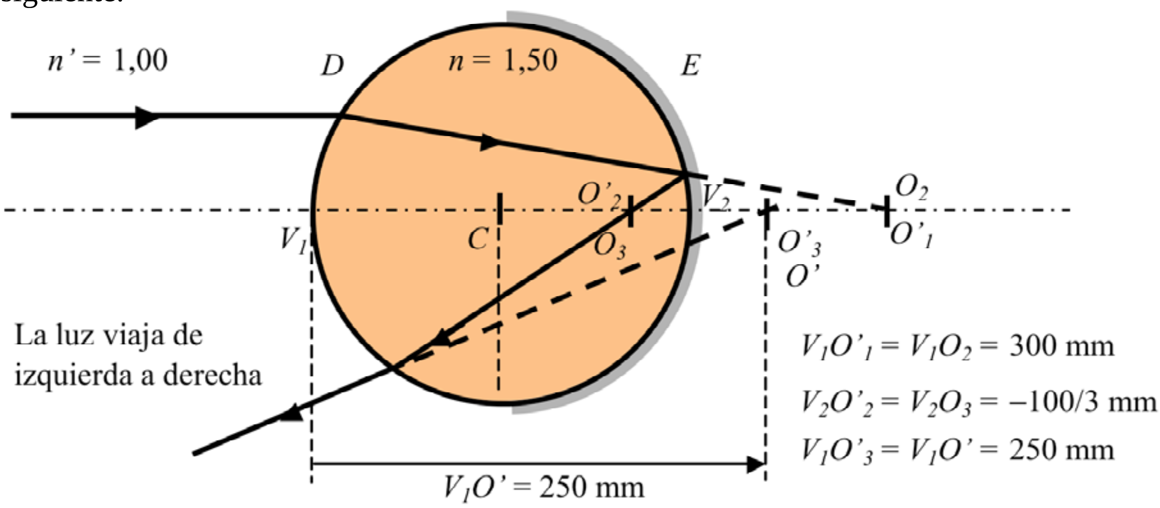


Figura 8

El problema también puede resolverse a partir del espejo equivalente.

El espejo equivalente es un espejo cuya acción es la misma que el sistema formado por el dioptrio *D* y el espejo *E*.

El espejo equivalente queda determinado por la posición de su vértice (V_{eq}) y de su centro (C_{eq}).

V_{eq} es el conjugado objeto del vértice V del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio D.

C_{eq} es el conjugado objeto del centro C del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio D.

Se pueden representar también como los pares de elementos conjugados (V_{eq}, V) y (C_{eq}, C).

Determinemos las posiciones de V_{eq} y C_{eq} a partir de las posiciones de V y C.

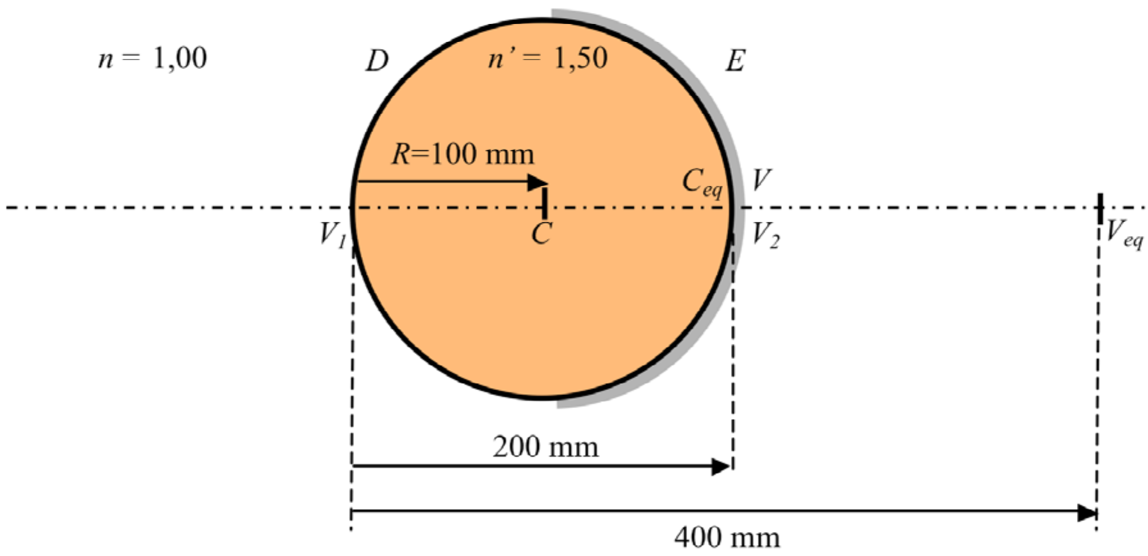


Figura 9

Posición de V_{eq}:

Aplicando Descartes:

$$-S + S' = P'; \qquad -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = P'.$$

$n = 1{,}00;$ $\quad n' = 1{,}50;$ $\quad s' = DV = V_1V_2 = 200$ mm; $\quad P' = \dfrac{5}{1000}$ mm^{-1}.

$$-\frac{1{,}00}{s} + \frac{1{,}50}{200} = \frac{5}{1000}; \qquad -\frac{1}{s} = \frac{5}{1000} - \frac{1{,}50}{200} = \frac{5 - 7{,}5}{1000} = -\frac{2{,}5}{1000}\ \text{mm}^{-1};$$

$$s = V_1V_{eq} = \frac{1000}{2{,}5} = 400\ \text{mm}.$$

Posición de C_{eq}:

Aplicando Descartes:

$$-S + S' = P'; \qquad -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = P'.$$

$n = 1{,}00$; $n' = 1{,}50$; $s' = DC = V_1C = 100$ mm; $P' = \dfrac{5}{1000}$ mm^{-1}.

$$-\frac{1{,}00}{s} + \frac{1{,}50}{100} = \frac{5}{1000}; \qquad -\frac{1}{s} = \frac{5}{1000} - \frac{1{,}50}{100} = \frac{5-15}{1000} = -\frac{10}{1000}\ \text{mm}^{-1};$$

$$s = V_1C_{eq} = \frac{1000}{10} = 100\ \text{mm}.$$

Radio del espejo equivalente:

$R_{eq} = V_{eq}C_{eq} = V_{eq}V_1 + V_1C_{eq} = -400 + 100 = -300$ mm.

Imagen formada por el espejo equivalente:

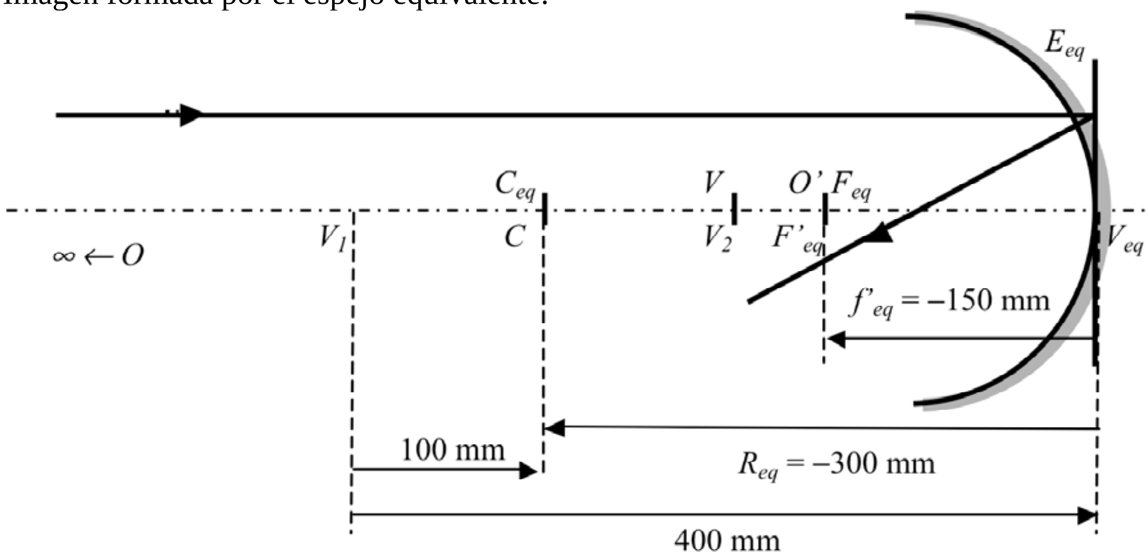


Figura 10

Por estar situado el objeto en el infinito, la imagen se formará en el punto focal imagen del espejo equivalente.

$$f'_{eq} = \frac{R_{eq}}{2} = \frac{-300}{2} = -150\ \text{mm}.$$

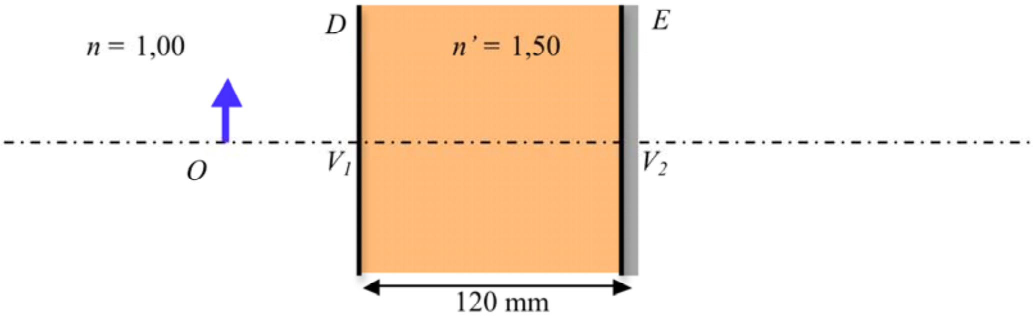
La posición de la imagen será: $V_{eq}O' = f'_{eq} = -150$ mm.

Si tomamos como origen para determinar la imagen el punto V_1 la posición será:

$V_1O' = V_1V_{eq} + V_{eq}O' = 400 - 150 = 250$ mm.

Valor que coincide con en encontrado en el apartado anterior.

2. Sea el sistema de la figura formado por un bloque de vidrio de forma cúbica con la cara espejada en la cara posterior. Sabiendo que V_1O = –60 mm y que el tamaño del objeto es de 30 mm. Determina:
a) La posición de la imagen final (V_1O').
b) El tamaño de dicha imagen.



SOLUCIÓN:

a) Consideremos la asociación de un dioptrio plano *D* y un espejo plano *E*. La imagen final se obtendrá a partir de la acción encadenada del dioptrio plano *D* (D_1), el espejo plano *E* y el dioptrio plano *D* (D_3) a la vuelta, ya que el rayo de luz atraviesa el dioptrio plano dos veces.

El esquema es el siguiente:

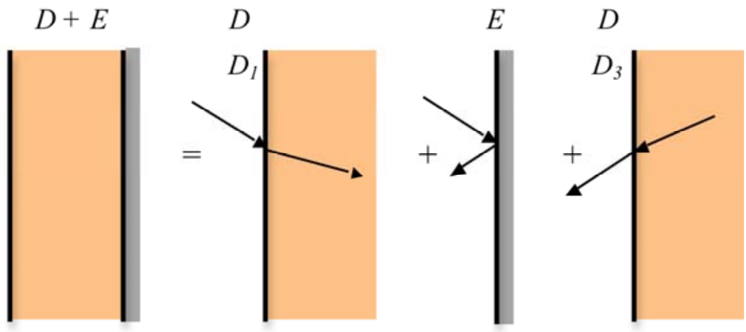


Figura 1

a1) Imagen formada por el dioptrio plano D_1 (La luz que incide en el dioptrio D_1 va de izquierda a derecha):

Aplicamos la relación de conjugación del dioptrio plano:

$$\overline{s_1} = \overline{s'_1}\,; \qquad \frac{s_1}{n_1} = \frac{s'_1}{n'_1}\,; \qquad n_1 = n = 1{,}00;\ \ s_1 = V_1O = -60 \text{ mm};\ \ n'_1 = n' = 1{,}50.$$

$$\frac{-60}{1{,}00} = \frac{s'_1}{1{,}5}\,; \qquad s'_1 = V_1O'_1 = -90 \text{ mm}.$$

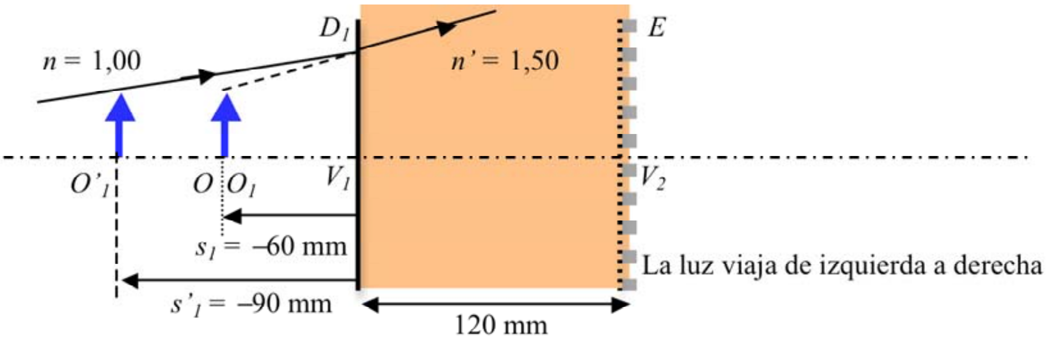


Figura 2

Debido a que el dioptrio es plano $m_1 = 1$.

a2) Imagen formada por el espejo E (La luz que incide en el espejo E va de izquierda a derecha):

De la ecuación del espejo plano:

$$s'_2 = -s_2$$

$s_2 = V_2O_2 = -(120 + 90) = -210$ mm.

$s'_2 = V_2O'_2 = 210$ mm.

Debido a que el espejo es plano $m_2 = 1$.

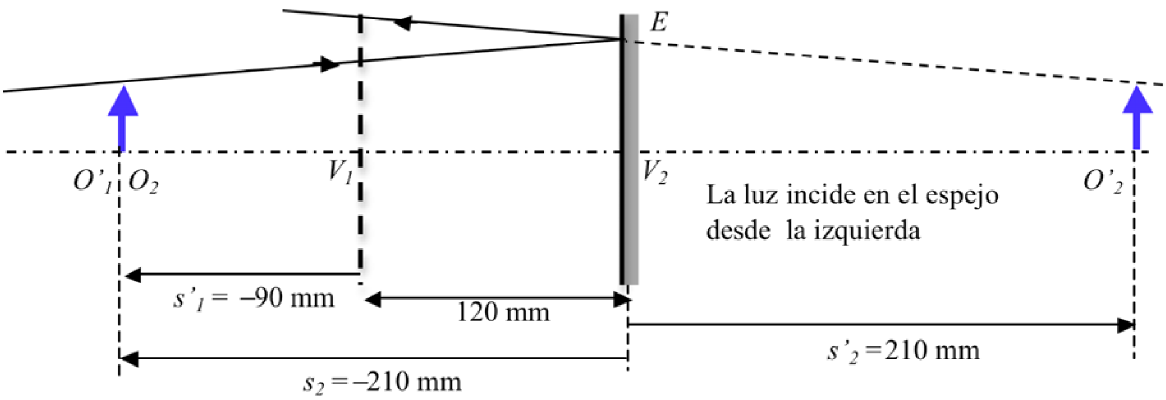


Figura 3

a3) Imagen formada por el dioptrio plano D_3 a la vuelta (La luz que incide en el dioptrio plano D_3 va de derecha a izquierda):

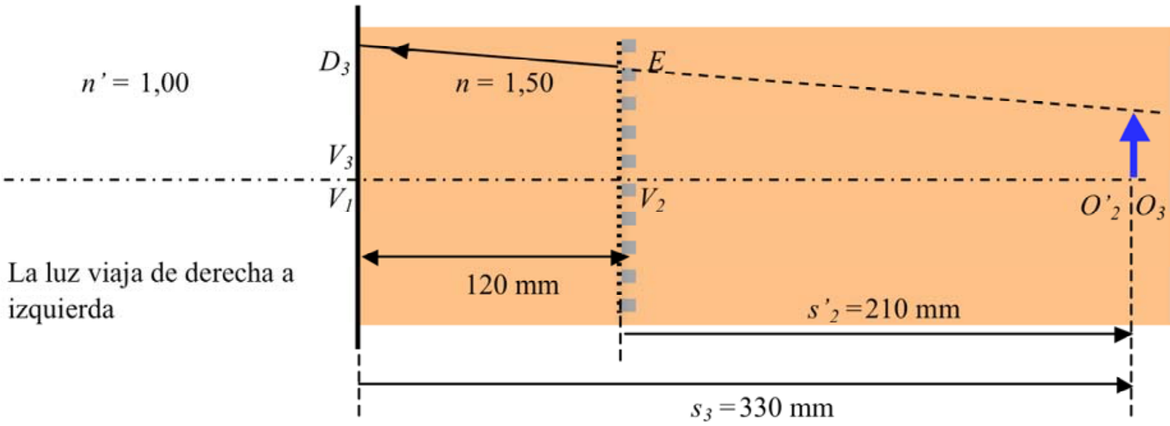


Figura 4

En este caso la luz viaja de derecha a izquierda. Por otro lado todas las fórmulas utilizadas consideran que la luz viaja de izquierda a derecha. Debe esquematizarse el problema de manera que la luz incida de izquierda a derecha.

a31) Consideremos que la luz viaja de izquierda a derecha. Cambiemos la orientación del esquema anterior de manera que se muestre el cambio de sentido en la trayectoria de la luz:

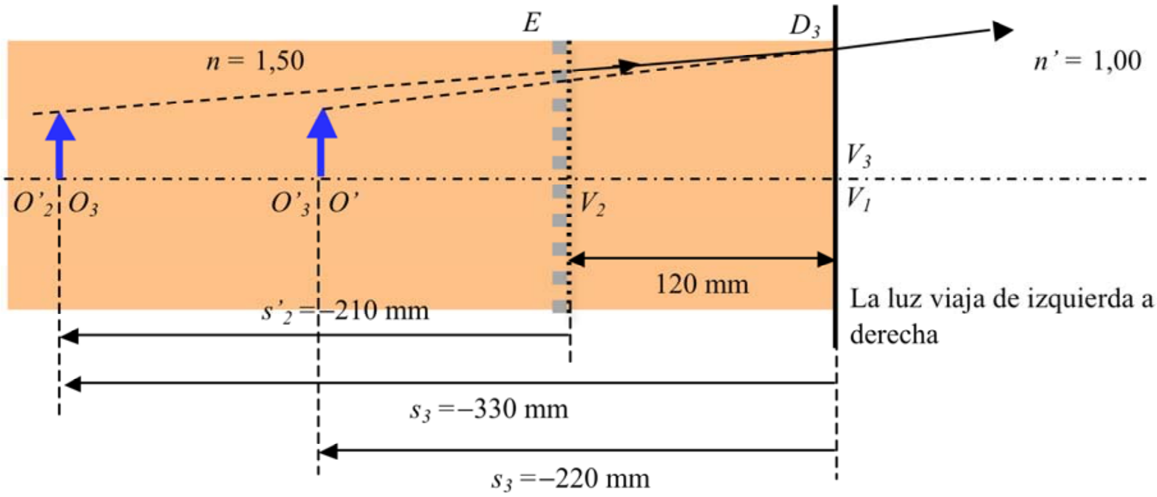


Figura 5

Aplicamos la relación de conjugación del dioptrio plano:

$\overline{s_3} = \overline{s'_3}$; $\dfrac{s_3}{n_3} = \dfrac{s'_3}{n'_3}$; $n_3 = n = 1{,}50$; $s_3 = V_3O_3 = -330$ mm; $n'_3 = n' = 1{,}00$.

$\dfrac{-330}{1{,}50} = \dfrac{s'_3}{1{,}00}$; $s'_3 = V_3O'_3 = -220 \text{ mm} = V_3O' = V_3O'$.

Cambiemos finalmente la orientación del sistema de manera que volvamos a la configuración inicial:

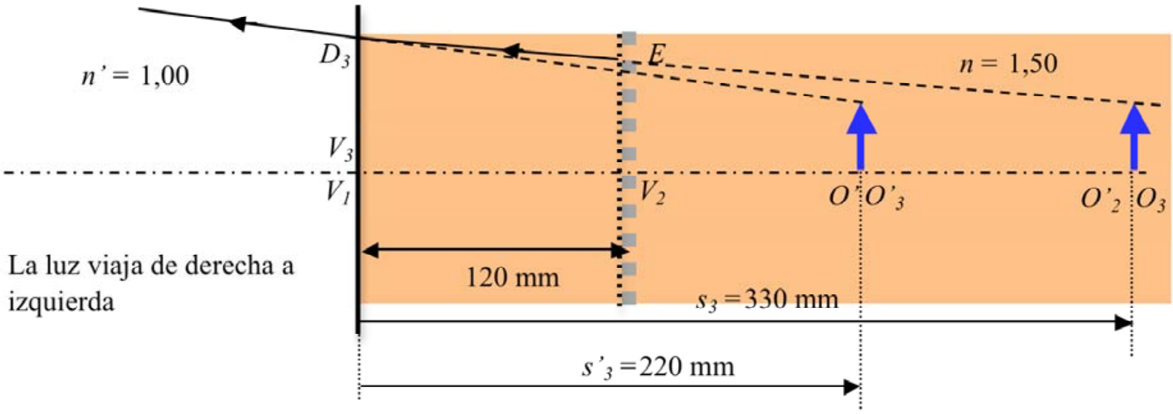


Figura 6

La posición de la imagen final será: $s'_3 = V_1O'_3 = V_2O'_3 = V_1O' = V_2O' = 220$ mm.

Debido a que el dioptrio es plano $m_3 = 1$.

a32) Resolvamos el apartado anterior considerando que la luz viaja de izquierda a derecha sin cambiar la orientación del esquema.

Consideremos el esquema de la figura 6. Debido a la reversibilidad en la trayectoria del rayo de luz podemos esquematizar la figura anterior de la siguiente manera (Obsérvese que en el esquema de la figura 7 se ha cambiado el sentido del rayo de luz):

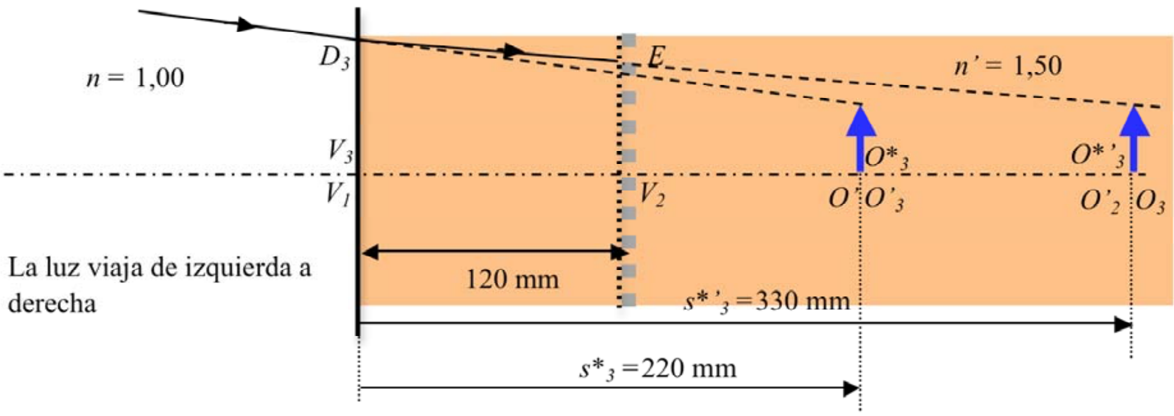


Figura 7

En el esquema de la figura 7 O'_3 es el objeto, que denominaremos O^*_3 y O_3 es la imagen, que denominaremos $O^{*\prime}_3$.

De la relación de conjugación del dioptrio plano:

$$\overline{s^*_3} = \overline{s^{*\prime}_3}\,; \qquad \frac{s^*_3}{n_3} = \frac{s^{*\prime}_3}{n'_3}\,; \qquad n_3 = n = 1{,}00; \qquad n'_3 = n' = 1{,}50;$$

$s^{*\prime}_3 = V_3O^{*\prime}_3 = V_3O_3 = -330$ mm;

$$\frac{s^*_3}{1{,}00} = \frac{-330}{1{,}50}\,; \qquad s^*_3 = V_3O^*_3 = V_1O'_3 = -220 \text{ mm.}$$

Aumento: $m^*_3 = 1$.

Deshacemos los cambios para obtener el resultado final:

$$s_3 = V_3O_3 = V_1O_3 = s^{*\prime}_3 = 330 \text{ mm};$$

$$s'_3 = V_3O'_3 = V_3O' = V_1O'_3 = V_1O' = s^*_3 = -220 \text{ mm.}$$

$$m_3 = \frac{1}{m^*_3} = 1\,.$$

Así pues la imagen final O' y todas la imágenes intermedias se muestran en la figura siguiente.

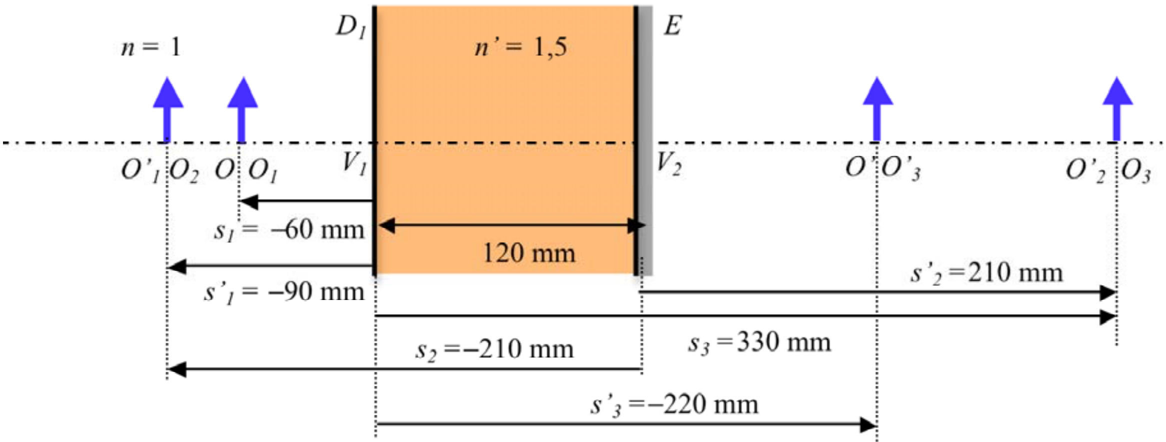


Figura 7

b) El aumento total será: $m = m_1\, m_2\, m_3 = 1.1.1 = 1$, lo que significa que el tamaño de la imagen es $y' = 30$ mm.

También podemos considerar la asociación de una lámina plano-paralela *lpp* (sumergida en aire) y un espejo plano *E*. La imagen final se obtendrá a partir de la acción encadenada de la lámina plano-paralela lpp_1, el espejo plano *E* y la lámina plano-paralela lpp_3 a la vuelta, ya que el rayo de luz atraviesa la lámina plano-paralela dos veces.

El esquema es el siguiente:

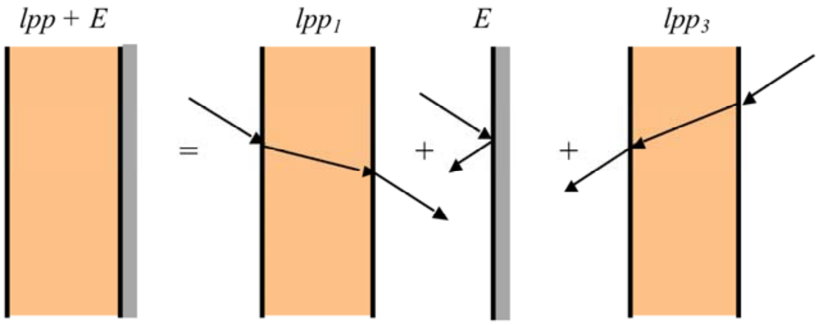


Figura 8

La posición de la imagen final así como su aumento será el mismo que en el caso anterior. Sin embargo las posiciones de las imágenes intermedias serán diferentes.

El problema también puede resolverse a partir del espejo equivalente.

El espejo equivalente es un espejo cuya acción es la misma que el sistema formado por el dioptrio plano *D* y el espejo *E*.

El espejo equivalente queda determinado por la posición de su vértice (V_{eq}) y de su centro (C_{eq}).

V_{eq} es el conjugado objeto del vértice *V* del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio plano *D*.

C_{eq} es el conjugado objeto del centro *C* del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio plano *D*.

Se pueden representar también como los pares de elementos conjugados (V_{eq}, *V*) y (C_{eq}, *C*) a través del dioptrio plano *D*.

Determinemos las posiciones de V_{eq} y C_{eq} a partir de las posiciones de *V* y *C*.

Posición de V_{eq}:

$n = 1{,}00;$ $\qquad n' = 1{,}50;$ $\qquad s' = DV = V_1V_2 = 120$ mm.

$\bar{s} = \bar{s'}\,;$ $\qquad \dfrac{s}{n} = \dfrac{s'}{n'}\,;$ $\qquad \dfrac{s}{1{,}00} = \dfrac{120}{1{,}50}\,;$ $\qquad s = DV_{eq} = V_1V_{eq} = 80$ mm.

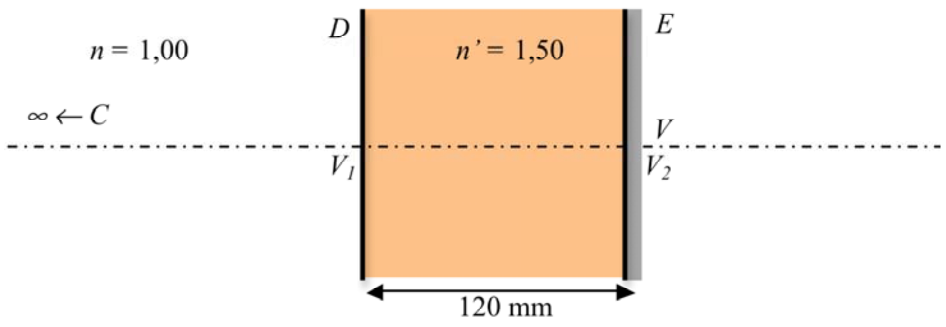


Figura 9

Posición de C_{eq}:

n = 1,00; n' = 1,50; $s' = DC = V_1C = \infty$.

$\bar{s} = \bar{s}'$; $\frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}$; $\frac{s}{1{,}00} = \frac{\infty}{1{,}50}$; $s = DC_{eq} = V_1C_{eq} = \infty$;

Radio del espejo equivalente:

$R_{eq} = V_{eq}C_{eq} = V_{eq}V_1 + V_1C_{eq} = -80 + \infty = \infty$.

Debido que el radio del espejo equivalente es infinito se trata de un espejo plano.

Imagen formada por el espejo equivalente:

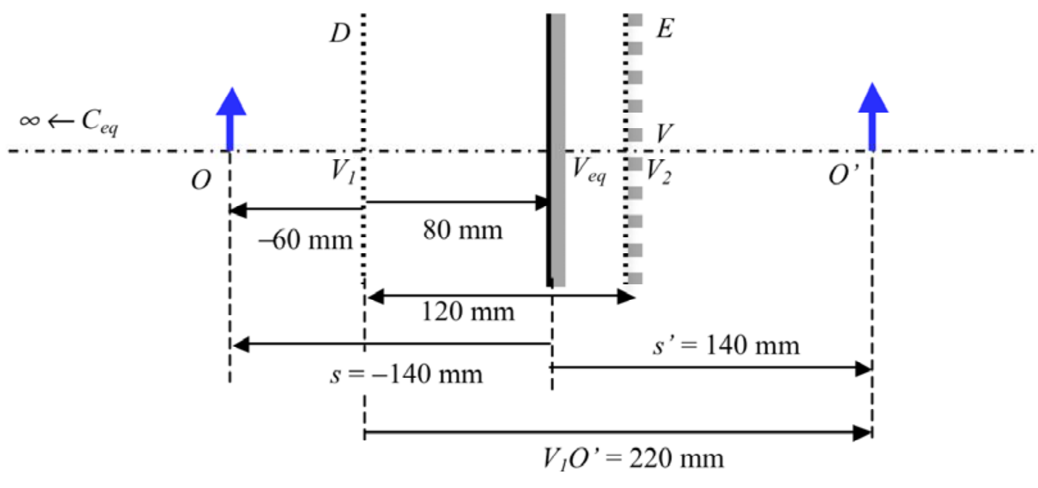


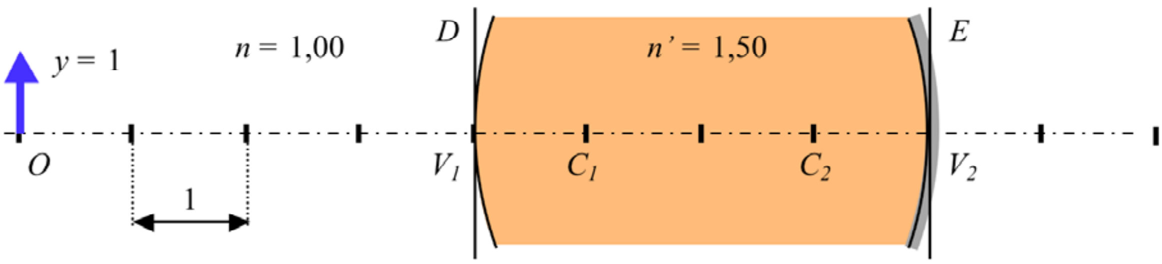
Figura 10

Por ser espejo plano: $s = -s'$.

$s = -140$ mm; $s' = 140 \text{ mm} = V_{eq}O'$.

V_1O' = 80 + 140 = 220 mm. Que coincide con el resultado obtenido anteriormente.

3. Sea el sistema de la figura formado por la asociación de un dioptrio esférico *D* y un espejo, también esférico, *E*. Determina:
a) La posición de la imagen final (V_1O').
b) El aumento lateral producido por el sistema.
c) El tamaño de la imagen final.



SOLUCIÓN:

a) Consideremos la asociación del dioptrio esférico *D* y el espejo esférico *E*. La imagen final se obtendrá a partir de la acción encadenada del dioptrio esférico *D* (D_1), el espejo esférico *E* y el dioptrio esférico a la vuelta *D* (D_3), ya que el rayo de luz atraviesa el dioptrio *D* dos veces.

El esquema es el siguiente:

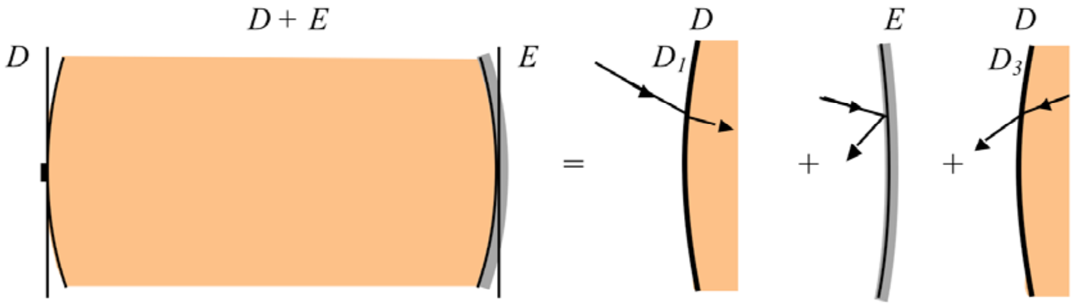


Figura 1

a1) Imagen formada por el dioptrio esférico D_1 (La luz que incidente en el dioptrio D_1 va de izquierda a derecha):

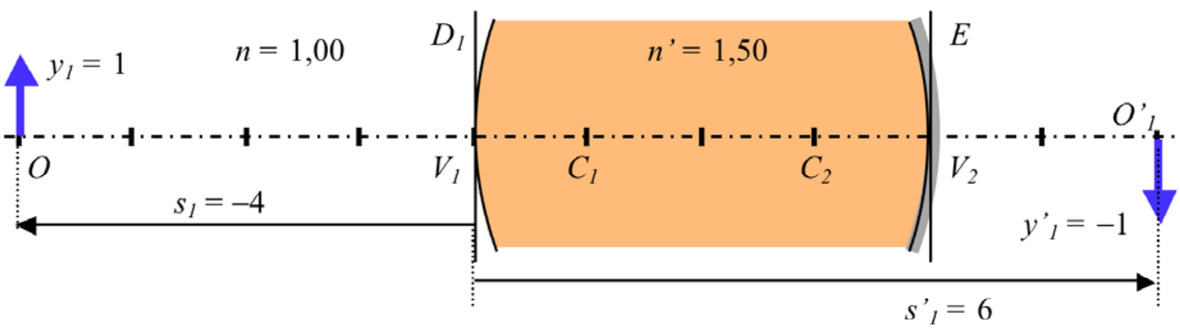


Figura 2

Determinemos, en primer lugar, la potencia del dioptrio D (D_1).

$$P'_D = P'_1 = \frac{n'_1 - n_1}{R_1}. \qquad n_1 = 1{,}00; \qquad n'_1 = 1{,}50; \qquad R_1 = 1.$$

$$P'_D = P'_1 = \frac{1{,}50 - 1{,}00}{1} = \frac{1}{2}.$$

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-S_1 + S'_1 = P'_1$$

$n_1 = n = 1{,}00$; $\qquad n'_1 = n = 1{,}50$; $\qquad S_1 = \dfrac{n_1}{s_1} = \dfrac{1{,}00}{-4}$; $\qquad S'_1 = \dfrac{n'_1}{s'_1} = \dfrac{1{,}50}{s'_1}$;

$$P'_D = P'_1 = \frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1{,}00}{-4} + \frac{1{,}50}{s'_1} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{1{,}50}{s'_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$s'_1 = V_1O'_1 = 6.$$

Aumento: $m_1 = \dfrac{y'_1}{y_1} = \dfrac{n_1 s'_1}{n'_1 s_1} = \dfrac{1{,}00(6)}{1{,}50(-4)} = -1$.

$$y'_1 = m_1 y_1 = (-1)1 = -1.$$

a2) Imagen formada por el espejo esférico E (La luz que incide en el espejo E va de izquierda a derecha):

De la ecuación de Descartes aplicada al espejo esférico:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{2}{R_2}$$

$s_2 = V_2O_2 = V_2V_1 + V_1O_2 = -4 + 6 = 2$; $\qquad R_2 = -1$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{2}{-1}; \qquad \frac{1}{s'_2} = -\frac{2}{1} - \frac{1}{2} = \frac{-4-1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

$$s'_2 = V_2O'_2 = -\frac{2}{5}.$$

Aumento: $m_2 = \dfrac{y'_2}{y_2} = -\dfrac{s'_2}{s_2} = -\dfrac{-\dfrac{2}{5}}{2} = \dfrac{1}{5}$.

$y'_2 = m_2 y_2 = \dfrac{1}{5}(-1) = -\dfrac{1}{5}$.

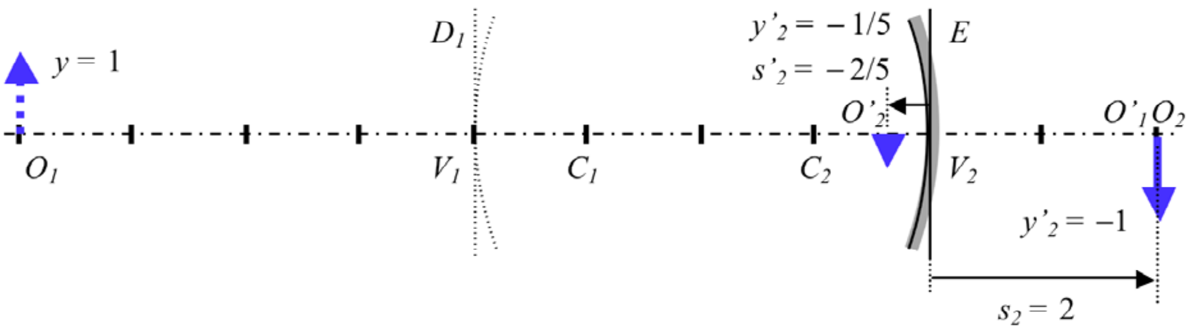


Figura 3

a3) Imagen formada por el dioptrio esférico D_3 a la vuelta (La luz que incide en el dioptrio D_3 va de derecha a izquierda):

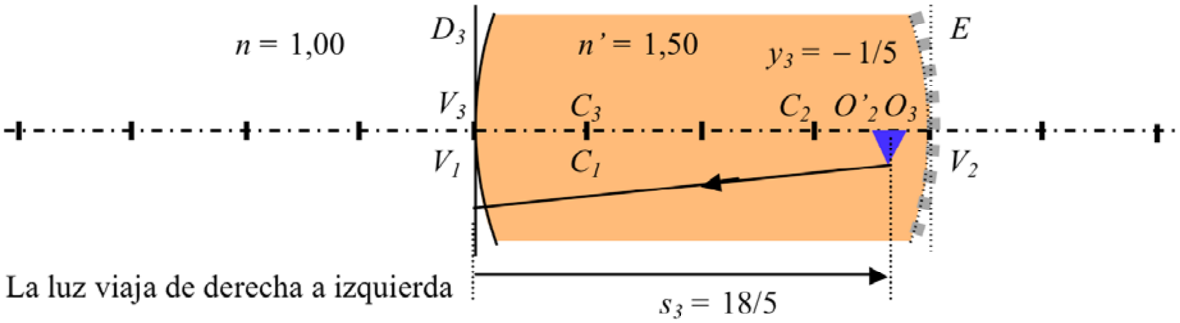


Figura 4

En este caso la luz incide en el dioptrio viajando de derecha a izquierda. Por otro lado todas las fórmulas utilizadas consideran que la luz viaja de izquierda a derecha. Debe esquematizarse el problema de manera que la luz incida de izquierda a derecha.

a31) Consideremos que la luz viaja de izquierda a derecha. Cambiemos la orientación del esquema anterior de manera que se muestre el cambio de sentido en la trayectoria de la luz:

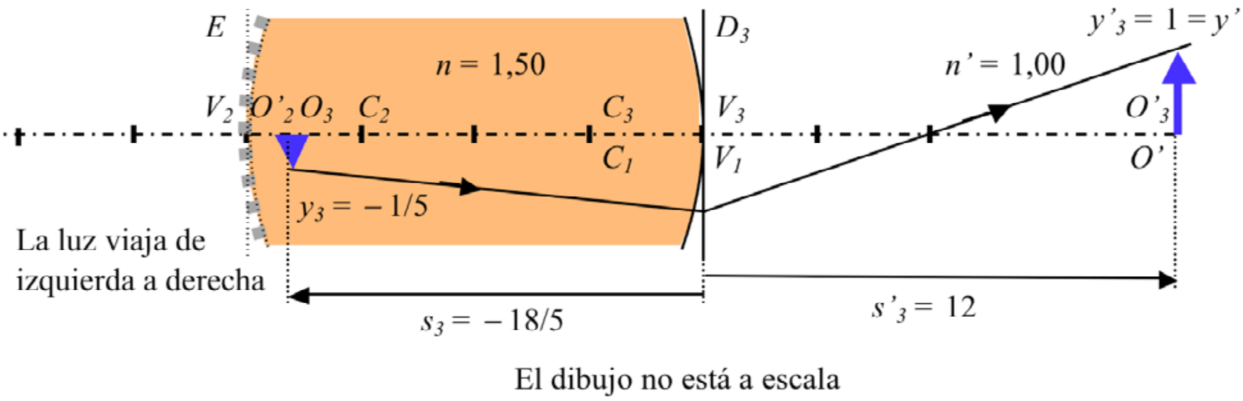


Figura 5

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-S_3 + S'_3 = P'_3$$

$n_3 = n = 1{,}50$; $\qquad n'_3 = n' = 1{,}00$.

$$S_3 = \frac{n_3}{s_3} = \frac{1{,}50}{-\frac{18}{5}} = -\frac{7{,}5}{18}; \qquad S'_3 = \frac{n'_3}{s'_3} = \frac{1{,}00}{s'_3};$$

$P'_3 = P'_D = \dfrac{1}{2}$ (Al cambiar la orientación del dioptrio la potencia no varía).

$$-\left(-\frac{7{,}5}{18}\right) + \frac{1}{s'_3} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{1}{s'_3} = \frac{1}{2} - \frac{7{,}5}{18} = \frac{9-7{,}5}{18} = \frac{1{,}5}{18};$$

$$s'_3 = \frac{18}{1{,}5} = 12.$$

Aumento: $m_3 = \dfrac{y'_3}{y_3} = \dfrac{n_3 s'_3}{n'_3 s_3} = \dfrac{1{,}50(12)}{1{,}00\left(-\frac{18}{5}\right)} = -5.$

$$y'_3 = m_3 y_3 = -5\left(-\frac{1}{5}\right) = 1.$$

Cambiemos finalmente la orientación del sistema de manera que volvamos a la configuración inicial:

La posición de la imagen final será: $s'_3 = V_1O'_3 = V_3O'_3 = V_1O' = V_3O' = -\ 12$ mm.

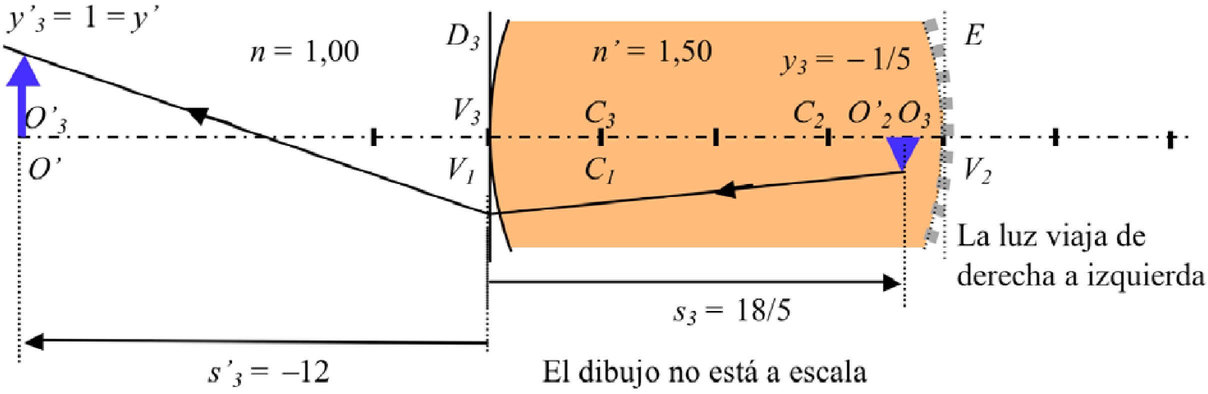


Figura 6

a32) Resolvamos el apartado anterior considerando que la luz viaja de izquierda a derecha sin cambiar la orientación del esquema.

Consideremos el esquema de la figura 6. Debido a la reversibilidad en la trayectoria del rayo de luz podemos esquematizar la figura anterior de la siguiente manera (Obsérvese que en el esquema de la figura 7 se ha cambiado el sentido del rayo de luz):

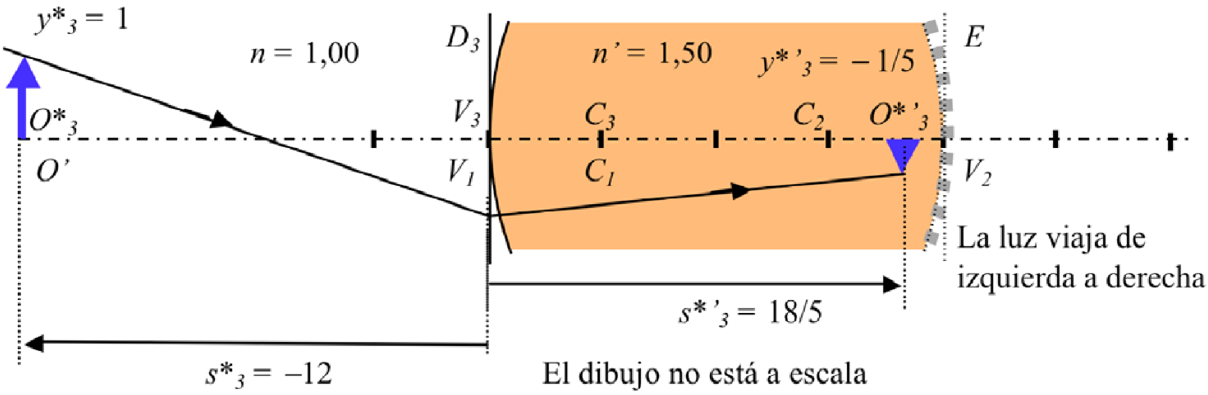


Figura 7

En el esquema de la figura 7 O'_3 es el objeto, que denominaremos O^*_3 y O_3 es la imagen, que denominaremos $O^{*'}_3$.

De la ecuación de Descartes:

$$-S^*_3 + S^{*'}_3 = P^{*'}_3$$

$n_3 = n = 1{,}00$; $\qquad n'_3 = n' = 1{,}50$.

$$S^{*'}_3 = \frac{n'_3}{s^{*'}_3} = \frac{1{,}50}{\frac{18}{5}} = \frac{7{,}5}{18}; \qquad S^*_3 = \frac{n_3}{s^*_3} = \frac{1{,}00}{s^*_3}; \qquad P^{*'}_3 = P'_D = \frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1}{s*_3}+\frac{7{,}5}{18}=\frac{1}{2}; \qquad -\frac{1}{s*_3}=\frac{1}{2}-\frac{7{,}5}{18}=\frac{9-7{,}5}{18}=\frac{1{,}5}{18}.$$

$$s*_3=-\frac{18}{1{,}5}=-12\,.$$

Aumento: $m*_3=\dfrac{y*'_3}{y*_3}=\dfrac{n_3 s*'_3}{n'_3 s*_3}=\dfrac{1{,}00\left(\frac{18}{5}\right)}{1{,}50(-12)}=-\dfrac{1}{5}\,.$

$$y'*_3=y'_2=-\frac{1}{5}; \qquad y*_3=\frac{y'*_3}{m*_3}=\frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}}=1\,.$$

Deshacemos los cambios para obtener el resultado final:

$$s_3=s*'_3=\frac{18}{5}; \qquad s'_3=s*_3=-12\,.$$

$$y_3=y*'_3=-\frac{1}{5}; \qquad y'_3=y*_3=+1\,.$$

$$m_3=\frac{1}{m*_3}=-5\,.$$

Así pues la imagen final *O’* y todas la imágenes intermedias se muestran en la figura siguiente.

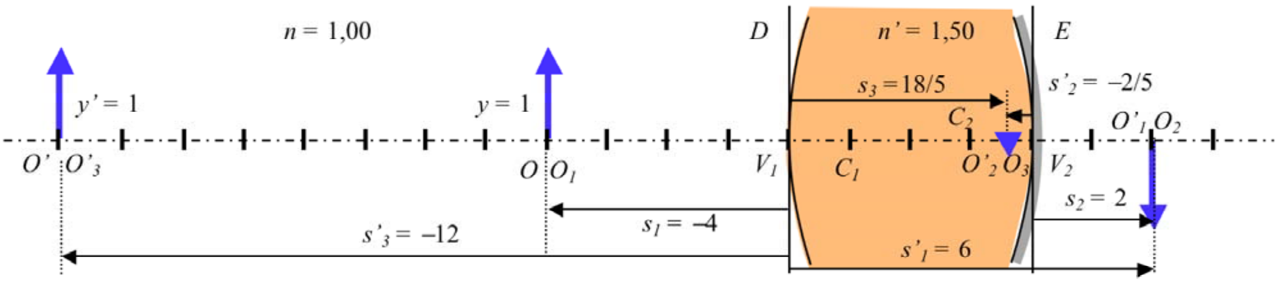


Figura 8

b) Aumento total:

$$m=m_1m_2m_3=(-1)\,\frac{1}{5}(-5)=+1\,.$$

c) $m=\dfrac{y'}{y}; \qquad +1=\dfrac{y'}{1}; \qquad y'=+1=y'_3\,.$

El problema también puede resolverse a partir del espejo equivalente.

El espejo equivalente es un espejo cuya acción es la misma que el sistema formado por el dioptrio *D* y el espejo *E*.

El espejo equivalente queda determinado por la posición de su vértice (V_{eq}) y de su centro (C_{eq}).

V_{eq} es el conjugado objeto del vértice *V* del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio *D*.

C_{eq} es el conjugado objeto del centro *C* del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio *D*.

Se pueden representar también como los pares de elementos conjugados (V_{eq}, *V*) y (C_{eq}, *C*) a través del dioptrio estérico *D*.

Determinemos las posiciones de V_{eq} y C_{eq} a partir de las posiciones de *V* y *C*.

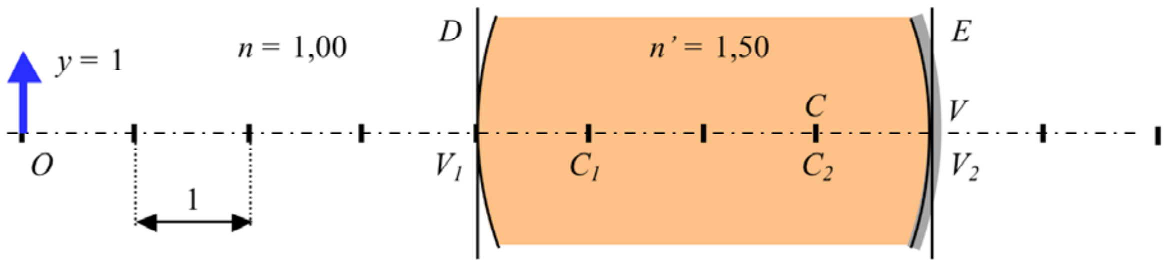


Figura 9

Posición de V_{eq}:

Aplicando Descartes:

$$-S + S' = P'; \qquad -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = P'.$$

$n = 1{,}00;$ $\quad n' = 1{,}50;$ $\quad s' = DV = V_1V_2 = 4;$ $\quad P' = \frac{1}{2}.$

$$-\frac{1{,}00}{s} + \frac{1{,}50}{4} = \frac{1}{2}; \qquad -\frac{1}{s} = \frac{1}{2} - \frac{1{,}50}{4} = \frac{2 - 1{,}5}{4} = \frac{0{,}5}{4} = \frac{1}{8};$$

$$s = V_1V_{eq} = -\,8.$$

Posición de C_{eq}.

Aplicando Descartes:

$$-S + S' = P'; \qquad -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = P'.$$

$n = 1{,}00;$ $\quad n' = 1{,}50;$ $\quad s' = DC_2 = V_1C_2 = 3;$ $\quad P' = \frac{1}{2}.$

$$-\frac{1,00}{s}+\frac{1,50}{3}=\frac{1}{2}; \qquad -\frac{1}{s}=\frac{1}{2}-\frac{1,5}{3}=\frac{3-3}{6}=\frac{0}{6}=0;$$

$s = V_1C_{eq} = \infty$.

Radio del espejo equivalente:

$R_{eq} = V_{eq}C_{eq} = V_{eq}V_1 + V_1C_{eq} = 8 + \infty = \infty$.

Debido que el radio del espejo equivalente es infinito se trata de un espejo plano.

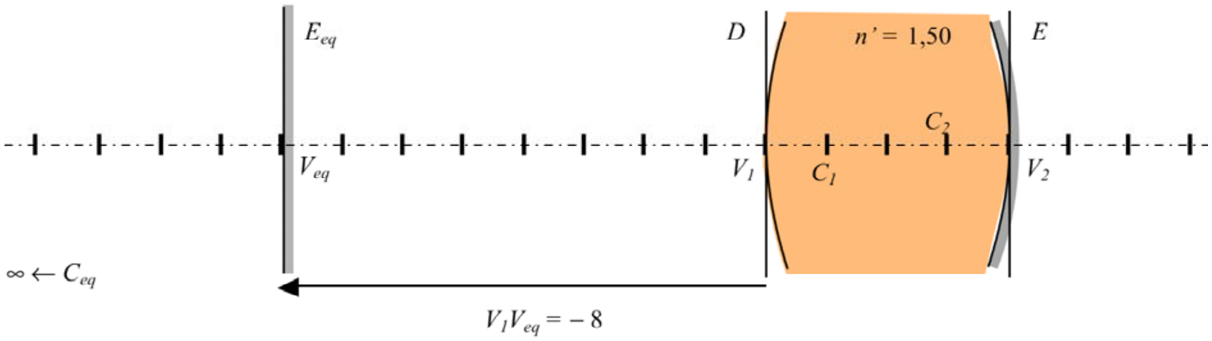


Figura 10

Determinemos la imagen que forma el espejo equivalente:

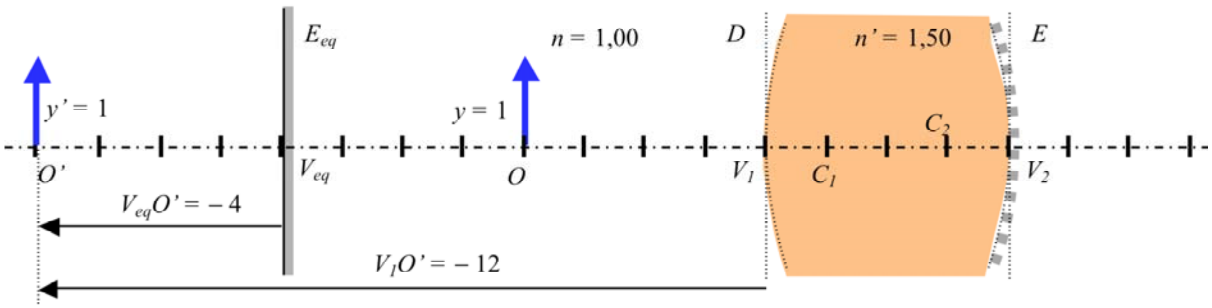


Figura 11

Por ser espejo plano: $s = -s'$.

$s = 4$; $\qquad s' = V_{eq}O' = -4$.

$V_1O' = V_1V_{eq} + V_{eq}O' = 8 + 4 = 12$.

Que coincide con el resultado obtenido anteriormente.

Por ser el espejo plano el aumento es $m = +1$ siendo el tamaño del objeto igual al de la imagen tal como se ha obtenido anteriormente.

4. Sea una lente delgada *L* de índice 1,40 sumergida en aire cuyas caras anterior (1) y posterior (2) tienen las potencias siguientes: P'_1 = 6 D y P'_2 = 4 D. Se espeja la cara posterior (2) de dicha lente.
Un objeto real de 10 mm de altura está situado a 200 mm de esta lente. Determina:
a) La posición de la imagen final.
b) El aumento lateral producido por el sistema.
c) El tamaño de la imagen final.

SOLUCIÓN:

Esquematicemos el problema:

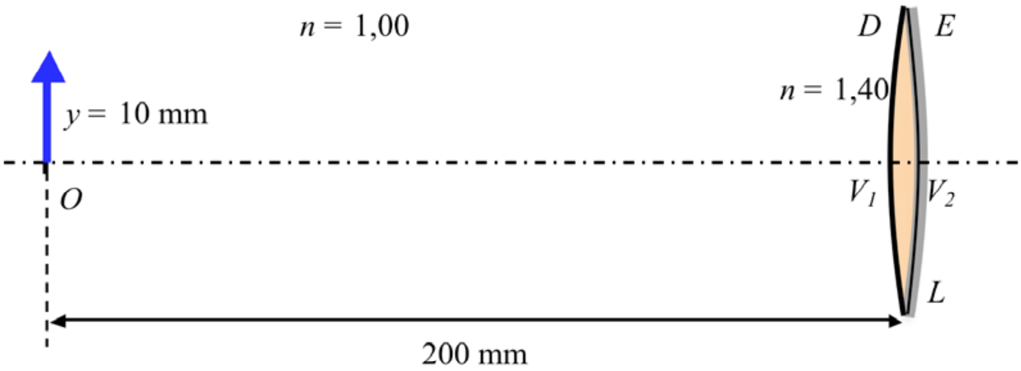


Figura 1

a) Consideremos la asociación del dioptrio esférico *D* y el espejo esférico *E*. La imagen final se obtendrá a partir de la acción encadenada del dioptrio esférico *D* (D_1), el espejo esférico *E* y el dioptrio esférico a la vuelta *D* (D_3), ya que el rayo de luz atraviesa el dioptrio *D* dos veces.

El esquema es el siguiente:

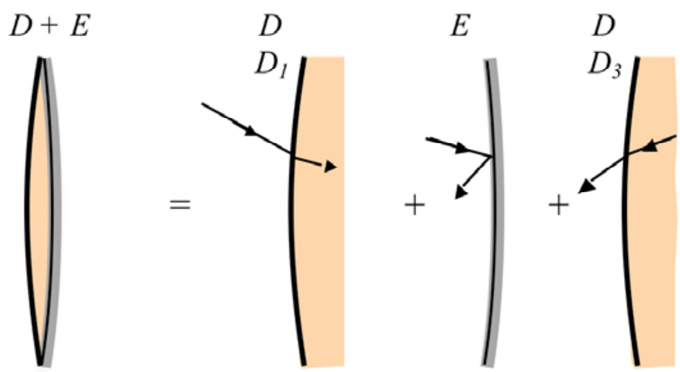


Figura 2

a1) Imagen formada por el dioptrio esférico D_1 (La luz que incide en el dioptrio D_1 va de izquierda a derecha):

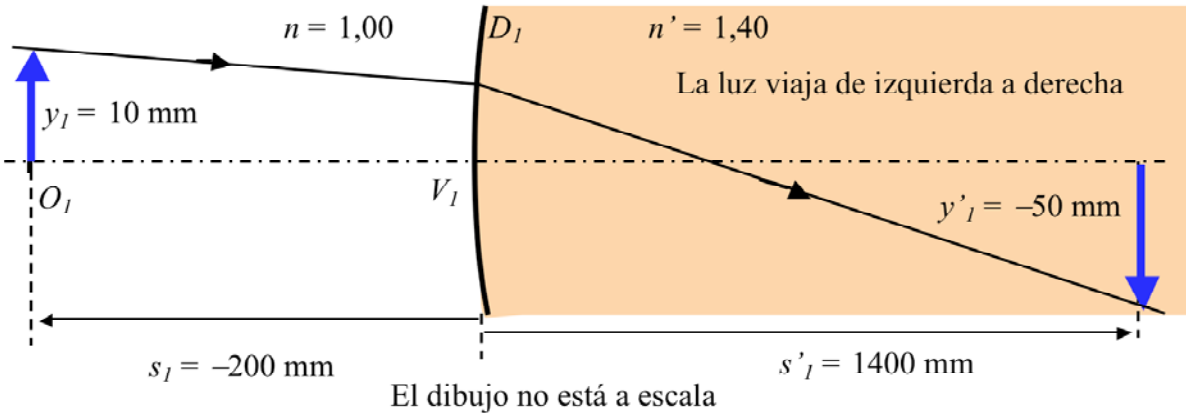


Figura 3

$$P'_1 = P'_D = 6\ \text{D} = 6\ \frac{1}{\text{m}}\frac{1\ \text{m}}{1000\ \text{mm}} = \frac{6}{1000}\frac{1}{\text{mm}} = \frac{6}{1000}\ \text{mm}^{-1}.$$

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-S_1 + S'_1 = P'_1$$

$n_1 = n = 1{,}00$; $\quad n'_1 = n' = 1{,}40$; $\quad S_1 = \dfrac{n_1}{s_1} = \dfrac{1{,}00}{-200}\ \text{mm}^{-1}$; $\quad S'_1 = \dfrac{n'_1}{s'_1} = \dfrac{1{,}40}{s'_1}\ \text{mm}^{-1}$;

$$P'_1 = P'_D = \frac{6}{1000}\text{mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1}{-200} + \frac{1{,}40}{s'_1} = \frac{6}{1000}; \qquad \frac{1{,}40}{s'_1} = \frac{6}{1000} - \frac{1}{200} = \frac{6-5}{1000} = \frac{1}{1000}\ \text{mm}^{-1}.$$

$$s'_1 = V_1O'_1 = 1400\ \text{mm}.$$

Aumento: $m_1 = \dfrac{y'_1}{y_1} = \dfrac{n_1 s'_1}{n'_1 s_1} = \dfrac{1{,}00(1400)}{1{,}40(-200)} = -5$;

$$y'_1 = m_1 y_1 = -5(10) = -\ 50\ \text{mm}.$$

a2) Imagen formada por el espejo esférico E (La luz que incide en el espejo E va de izquierda a derecha):

Determinemos, en primer lugar,el radio del espejo esférico, el cual coincide con el de la cara posterior de la lente (2).

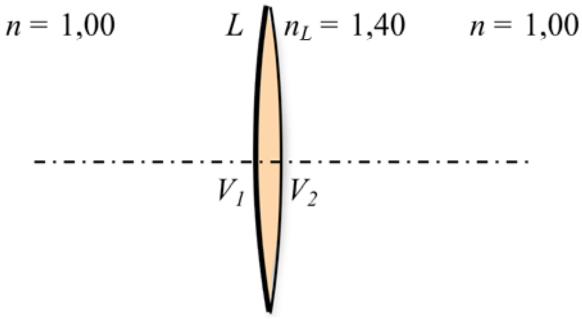


Figura 4

De la ecuación de la potencia de la cara 2:

$$P'_2 = \frac{n'_2 - n_2}{R_2}; \qquad n'_2 = n = 1{,}00; \qquad n_2 = n_L = 1{,}40; \qquad P'_2 = 4 \text{ D.}$$

$$4 = \frac{1{,}00 - 1{,}40}{R_2}; \qquad R_2 = -0{,}100 \text{ m} = -100 \text{ mm.}$$

De la ecuación de Descartes aplicada al espejo esférico:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{2}{R_2}$$

$s_2 = s'_1 = 1400$ mm (Objeto virtual); $\qquad R_2 = -100$ mm.

$$\frac{1}{1400} + \frac{1}{s'_2} = \frac{2}{-100}; \qquad \frac{1}{s'_2} = -\frac{2}{100} - \frac{1}{1400} = \frac{-28 - 1}{1400} = -\frac{29}{1400} \text{ mm}^{-1};$$

$$s'_2 = V_2O'_2 = -\frac{1400}{29} \text{ mm.}$$

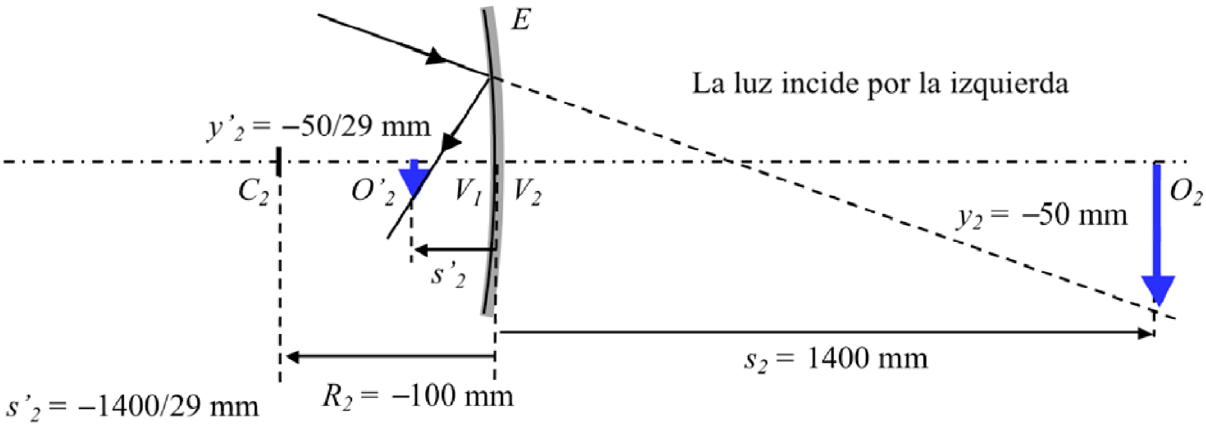


Figura 5

Aumento: $m_2 = \dfrac{y'_2}{y_1} = -\dfrac{s'_2}{s_2} = -\dfrac{-\dfrac{1400}{29}}{1400} = \dfrac{1}{29}$. $\qquad y'_2 = -\dfrac{50}{29}$ mm .

$$y'_2 = m_2 y_2 = \frac{1}{29}(-50) = -\frac{50}{29} \text{ mm.}$$

a3) Imagen formada por el dioptrio esférico D_3 a la vuelta (La luz que incide en el dioptrio D_3 va de derecha a izquierda):

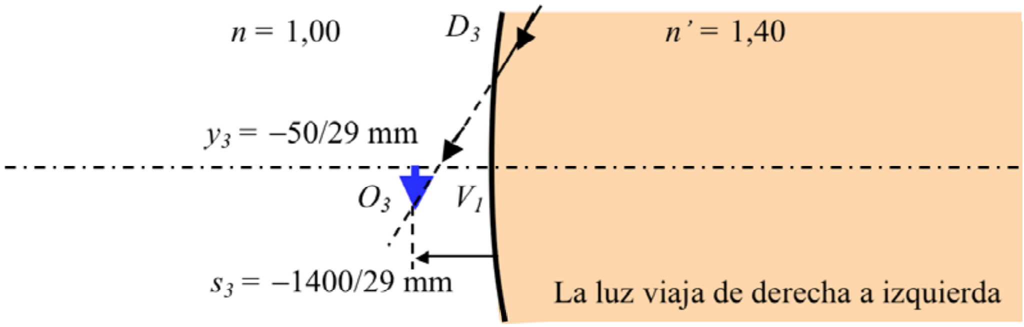


Figura 6

En este caso la luz incide en el dioptrio viajando de derecha a izquierda. Por otro lado todas las fórmulas utilizadas consideran que la luz viaja de izquierda a derecha. Debe esquematizarse el problema de manera que la luz incida de izquierda a derecha.

a31) Consideremos que la luz viaja de izquierda a derecha. Cambiemos la orientación del esquema anterior de manera que se muestre el cambio de sentido en la trayectoria de la luz:

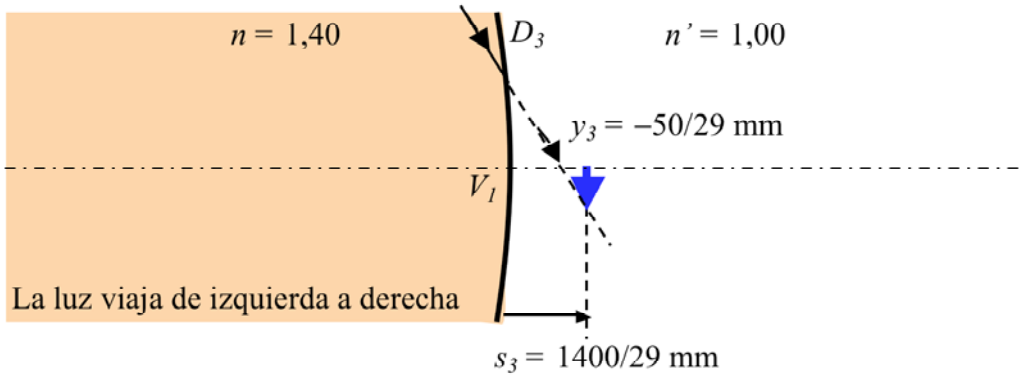


Figura 7

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-S_3 + S'_3 = P'_3$$

$n_3 = n = 1{,}40$; $n'_3 = n' = 1{,}00$;

$S_3 = \dfrac{n_3}{s_3} = \dfrac{1{,}40}{\dfrac{1400}{29}} = \dfrac{29}{1000}$ mm^{-1} (Objeto virtual); $S'_3 = \dfrac{n'_3}{s'_3} = \dfrac{1{,}00}{s'_3}$ mm^{-1};

$P'_3 = P'_D = \dfrac{6}{1000}$ mm^{-1} (Al cambiar la orientación del dioptrio la potencia no varía).

$-\dfrac{29}{1000} + \dfrac{1}{s'_3} = \dfrac{6}{1000}$; $\dfrac{1}{s'_3} = \dfrac{6}{1000} + \dfrac{29}{1000} = \dfrac{35}{1000} = \dfrac{7}{200}$.

$s'_3 = \dfrac{200}{7}$ mm.

Aumento: $m_3 = \dfrac{y'_3}{y_3} = \dfrac{n_3 s'_3}{n'_3 s_3} = \dfrac{1{,}40\dfrac{200}{7}}{1{,}00\left(\dfrac{1400}{29}\right)} = \dfrac{29}{35}$.

$y'_3 = m_3 y_3 = \dfrac{29}{35}\left(-\dfrac{50}{29}\right) = -\dfrac{50}{35} = -\dfrac{10}{7}$ mm.

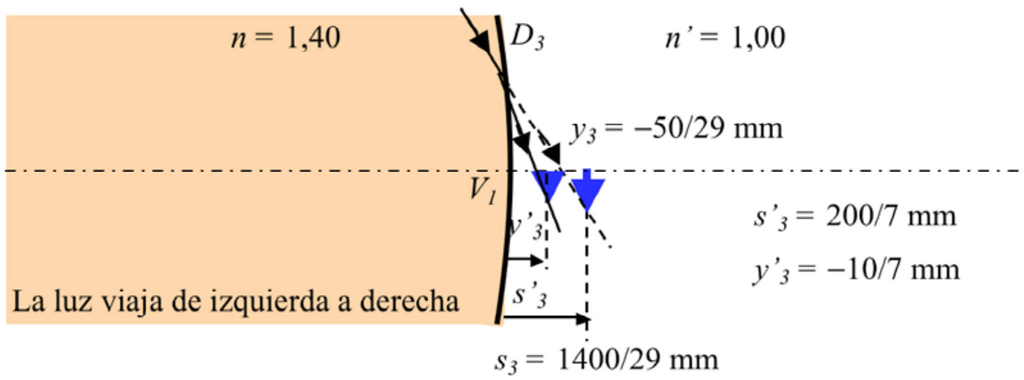


Figura 8

Cambiemos finalmente la orientación del sistema de manera que volvamos a la configuración inicial:

La posición de la imagen final será: $s'_3 = V_1O'_3 = V_2O'_3 = V_1O' = V_2O' = -\dfrac{200}{7}$ mm.

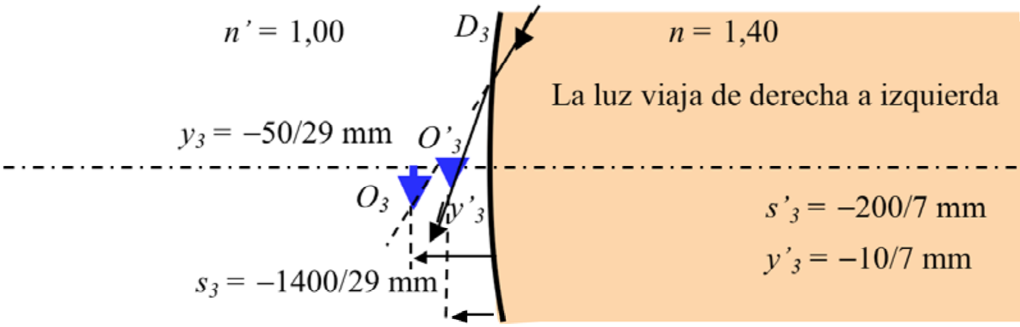


Figura 9

a32) Resolvamos el apartado anterior considerando que la luz viaja de izquierda a derecha sin cambiar la orientación del esquema.

Consideremos el esquema de la figura 9. Debido a la reversibilidad en la trayectoria del rayo de luz podemos esquematizar la figura anterior de la siguiente manera (Obsérvese que en el esquema de la figura 10 se ha cambiado el sentido del rayo de luz):

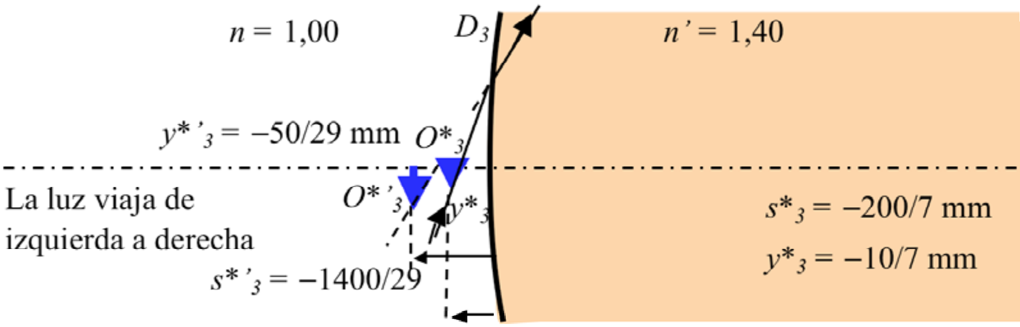


Figura 10

En el esquema de la figura 10 O'_3 es el objeto, que denominaremos O^*_3 y O_3 es la imagen, que denominaremos $O^{*\prime}_3$.

De la ecuación de Descartes:

$$-S^*_3 + S^{*\prime}_3 = P^{*\prime}_3$$

$n_3 = n = 1{,}00$; $n'_3 = n' = 1{,}40$;

$$S^*_3 = \frac{n_3}{s^*_3} = \frac{1{,}00}{s^*_3}\ \text{mm}^{-1};\quad S^{*\prime}_3 = \frac{n'_3}{s^{*\prime}_3} = \frac{1{,}40}{s^{*\prime}_3} = \frac{1{,}40}{-\frac{1400}{29}} = -\frac{29}{1000}\text{mm}^{-1}\ \text{(Imagen virtual)};$$

$$P^{*\prime}_3 = P'_D = \frac{6}{1000}\text{mm}^{-1}.$$

$$-\frac{1}{s^*_3} - \frac{29}{1000} = \frac{6}{1000};\qquad -\frac{1}{s^*_3} = \frac{6}{1000} + \frac{29}{100} = \frac{35}{1000} = \frac{7}{200}\ \text{mm}^{-1}.$$

$s^*_3 = -\dfrac{200}{7}$ mm .

Aumento: $m^*_3 = \dfrac{y^{*\prime}_3}{y^*_3} = \dfrac{n_3 s^{*\prime}_3}{n'_3 s^*_3} = \dfrac{1{,}00\left(-\dfrac{1400}{29}\right)}{1{,}40\left(-\dfrac{200}{7}\right)} = \dfrac{35}{29}$.

$y'^*_3 = y'_2 = -\dfrac{50}{29}$; $y^*_3 = \dfrac{y'^*_3}{m^*_3} = \dfrac{-\dfrac{50}{29}}{\dfrac{35}{29}} = -\dfrac{50}{35} = -\dfrac{10}{7}$.

Deshacemos los cambios para obtener el resultado final:

$s_3 = s^{*\prime}_3 = -\dfrac{1400}{29}$ mm ; $s'_3 = s^*_3 = -\dfrac{200}{7}$ mm .

$y_3 = y^{*\prime}_3 = -\dfrac{50}{29}$ mm ; $y'_3 = y^*_3 = -\dfrac{10}{7}$ mm .

$m_3 = \dfrac{y'_3}{y_3} = \dfrac{y^*_3}{y^{*\prime}_3} = \dfrac{1}{m^*_3} = \dfrac{29}{35}$.

Así pues la imagen *O’* formada por la acción de la lente y del espejo se muestra en la figura siguiente:

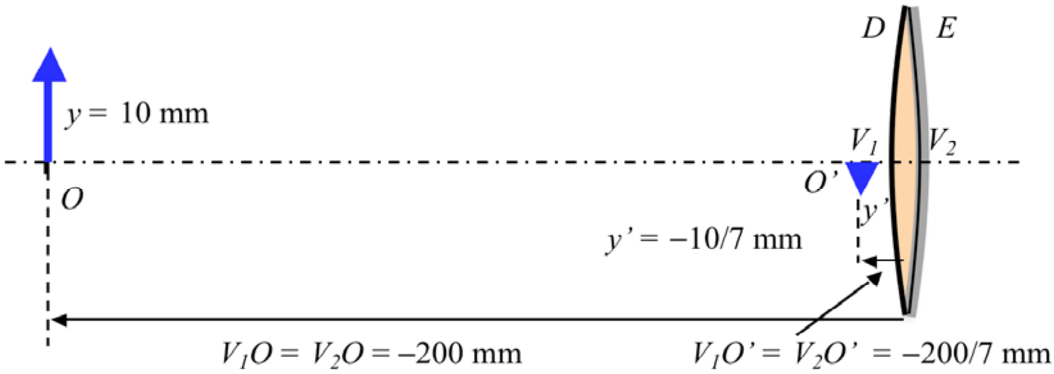


Figura 11

b) Aumento total:

$m = m_1 m_2 m_3 = (-5)\left(\dfrac{1}{29}\right)\left(\dfrac{29}{35}\right) = -\dfrac{1}{7}$.

c) $m = \dfrac{y'}{y}$; $-\dfrac{1}{7} = \dfrac{y'}{10}$; $y' = -\dfrac{10}{7} = y'_3$.

El problema también puede resolverse a partir del espejo equivalente.

El espejo equivalente es un espejo cuya acción es la misma que el sistema formado por el dioptrio esférico *D* y el espejo *E*.

El espejo equivalente queda determinado por la posición de su vértice (V_{eq}) y de su centro (C_{eq}).

V_{eq} es el conjugado objeto del vértice *V* del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio esférico *D*.

C_{eq} es el conjugado objeto del centro *C* del espejo a través del elemento anterior al espejo, en este caso el dioptrio esférico *D*.

Se pueden representar también como los pares de elementos conjugados (V_{eq}, *V*) y (C_{eq}, *C*) a través del dioptrio estérico *D*.

Determinemos las posiciones de V_{eq} y C_{eq} a partir de las posiciones de *V* y *C*.

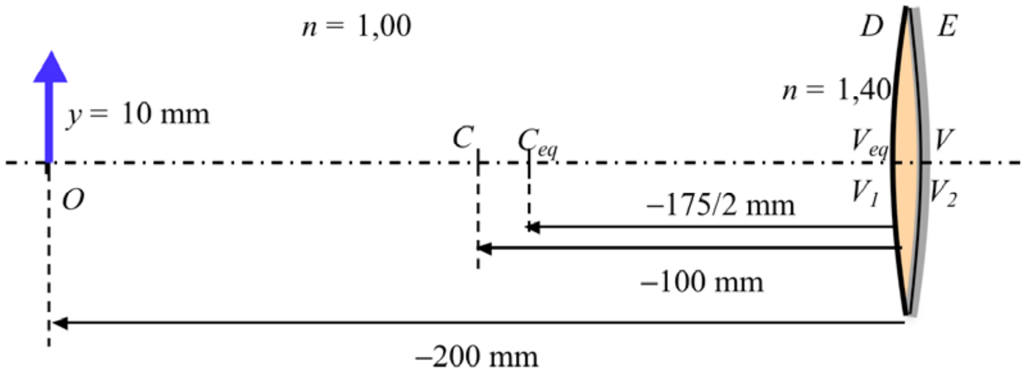


Figura 12

Posición de V_{eq}:

n = 1,00; n' = 1,40; $s' = DV = V_1V_2 = 0$ (por ser lente delgada).

Debido que la imagen está situada en el vértice del dioptrio, el objeto también lo estará.

$s = DV_{eq} = V_1V_{eq} = 0$.

Posición de C_{eq}.

Aplicando Descartes:

$$-S + S' = P'; \qquad -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = P'$$

$n = 1{,}00;$ $\quad n' = 1{,}40;$ $\quad s' = DC = V_1C = V_2C = -\,100$ mm; $\quad P' = \dfrac{6}{1000}$ mm^{-1}.

$$-\frac{1{,}00}{s} + \frac{1{,}40}{-100} = \frac{6}{1000}; \qquad -\frac{1}{s} = \frac{6}{1000} + \frac{1{,}40}{100} = \frac{6+14}{1000} = \frac{20}{1000} = \frac{1}{50}\ \text{mm}^{-1};$$

$s = -50$ mm $= V_1C_{eq}$.

Radio del espejo equivalente:

$R_{eq} = V_{eq}C_{eq} = V_{eq}V_1 + V_1C_{eq} = 0 - 50 = -50$ mm.

Imagen formada por el espejo equivalente:

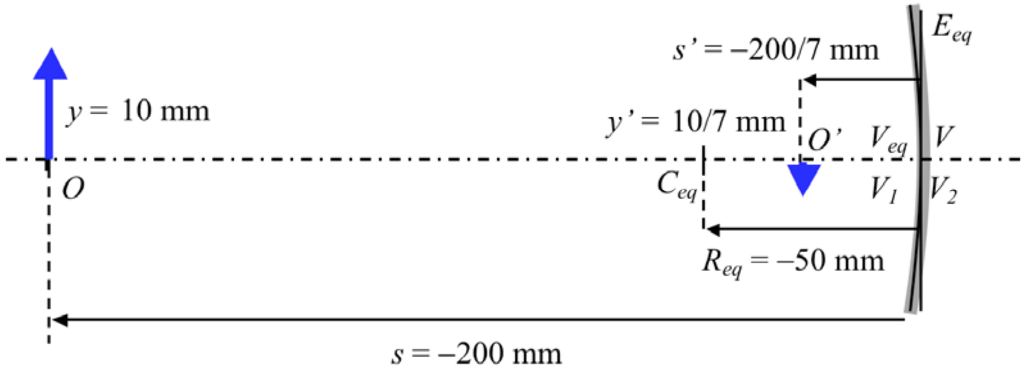


Figura 13

Aplicando Descartes:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R_{eq}}.$$

$s = -200$ mm; $\qquad R_{eq} = -50$ mm.

$$\frac{1}{-200} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-50}; \qquad \frac{1}{s'} = -\frac{1}{25} + \frac{1}{200} = \frac{-8+1}{200} = -\frac{7}{200}\ \text{mm}^{-1}.$$

$$s' = -\frac{200}{7}\ \text{mm} = V_{eq}O' = V_1O' = V_2O' = VO'.$$

Aumento:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{-\dfrac{200}{7}}{-200} = -\frac{1}{7}. \qquad y' = my = -\frac{1}{7}(10) = -\frac{10}{7}\ \text{mm}.$$